دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

اصل‌بندی‌های زیرمیدان‌های اعداد حقیقی

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

دکتر سمیه تاری

پژوهشگر

محمد صالح زرزا

۱۳۹۸

بسم الله الرحمن الرحيم

منّت خدای را عزّ و جلّ که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت

هر نفسی که فرو می رود ممدّ حیاتست و چون بر می آید مفرّح ذات

پس در هر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمتی شکری واجب

از دست و زبان که برآید
کز عهده شکرش به در آید

بنده همان به که ز تقصیر خویش
عذر به درگاه خدای آورد

ورنه سزاوار خداوندیش
کس نتواند که به جای آورد

باران رحمت بی حسابش همه را رسیده و خوان نعمت بی دریغش همه جا کشیده

پرده ناموس بندگان به گناه فاحش ندرد و وظیفه روزی به خطای منکر نبرد

ای کریمی که از خزانه غیب
گبر و ترسا وظیفه خور داری

دوستان را کجا کنی محروم
تو که با دشمن این نظر داری

فرّاش باد صبا را گفته تا فرش زمرّدی بگسترد و دایه ابر بهاری را فرموده تا بنات نبات در مهد زمین بپرورد

درختان را به خلعت نوروزی قبای سبز ورق در بر گرفته و اطفال شاخ را به قدوم موسم ربیع کلاه شکوفه بر

سر نهاده عصاره نالی به قدرت او شهد فایق شده و تخم خرمایی به تربیتش نخل باسق گشته

ابر و باد و مه و خورشید و فلک در کارند
تا تو نانی به کف آریّ و به غفلت نخوری

همه از بهر تو سرگشته و فرمان بردار
شرط انصاف نباشد که تو فرمان نبری

بنام خدا

اکنون که توفیق اتمام این رساله دست داده است، بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی خود را از کلیه افرادی که در انجام این تحقیق از راهنمایی‌ها و همکاری‌های ارزشمندشان بهره‌مند بوده‌ام، ابراز نموده، بهروزی و کامیابی روزافروزشان را از درگاه خداوند بزرگ آرزو نمایم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سعید صالحی پورمهر به سبب قبول زحمت هدایت این رساله که با سعه صدر در اتمام آن مرا یاری نموده و از هیچ کوششی دریغ نفرمودند، کمال سپاس و امتنان را دارم.

از استاد مشاور سرکار خانم دکتر سمیه تاری و از داوران گرانقدر آقایان دکتر محمد باقری، دکتر کریم ایواز و دکتر جابر کریمپور که زحمت داوری این رساله را پذیرفتند بسیار سپاسگزارم.

محمدصالح زرزا

۱۳۹۸

نام خانوادگی دانشجو: زرزا نام: محمد صالح

عنوان: اصل‌بندی‌های زیرمیدان‌های اعداد حقیقی

استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور : دکتر سمیه تاری

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۸ تعداد صفحات: ۴۵

کلید واژه‌ها: منطق مرتبه اول، نظریه‌های تمام، اصل‌بندی میدان اعداد حقیقی، استقراء پیوسته، میدان‌های بسته حقیقی.
شماره طبقه بندی: ۰۳B۲۵ · ۰۳C۳۵ · ۰۳C۱۰ · ۱۲L۰۵

چکیده

میدان مرتب اعداد حقیقی، تنها میدان مرتبی در حد یکریختی است که کامل می‌باشد، یعنی هر زیرمجموعه کراندار آن دارای کوچکترین کران بالایی است. معادل‌های بسیاری برای اصل کمال وجود دارند، مثلاً اصل عدم وجود برش ددکیند یا قضیه مقدار میانی. ما در این پایان‌نامه، اصل استقراء حقیقی را که معادل دیگری برای اصل کمال اعداد حقیقی است، مطالعه نموده و صورت‌بندی‌های مرتبه اول آن‌را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که صورت مرتبه اول اصل استقراء حقیقی، میدان‌های بسته حقیقی را روی میدان‌های مرتب اصل‌بندی می‌کند. ثابت می‌کنیم که یک صورت‌بندی مرتبه اول برای قضیه اساسی جبر نیز چنین ویژگی دارد. همچنین برهان‌های قضایای تارسکی برای تمامیت نظریه‌های میدان‌های بسته حقیقی و میدان‌های بسته جبری با مشخصه صفر ارایه و چند مساله باز در مورد میدان‌های مرتب طرح می‌شوند. نتایج حاصل از این پایان‌نامه در مقاله زیر انتشار یافته‌اند:

Salehi, Saeed & Zarza, Mohammadsaleh; *First-order Continous Induction and a logical study of real closed Fields*, **Bulletin of the Iranian Mathematical Society**, to appear (online 2019) doi: 10.1007/s41980-01900252-0

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

آنالیز حقیقی صرفاً مطالعه‌ی انبوهی از حقایق بدیهی و نابدیهی در مورد میدان مرتب اعداد حقیقی نیست؛ بلکه مطالعه‌ی نظام‌مند ساختار میدان مرتب اعداد حقیقی است. اصل‌بندی کردن، معمول‌ترین راهبرد مطالعه‌ی اشیاء ریاضی است. بعضی از ساختارهای اصل موضوعی، صرفاً از تعاریف تشکیل شده‌اند، مانند نظریه گروهها؛ در ریاضیات و سایر شاخه های علوم، نمونه‌های فراوانی از گروه‌ها وجود دارند. اما بعضی از اصل‌بندی‌ها، بسیار بیشتر و عمیق‌تر از تعاریف محض هستند، مانند اصول میدان‌های مرتب کامل. یک میدان مرتب را کامل می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی از بالا کراندار آن دارای کوچکترین کران بالا باشد. (توجه داریم که این مفهوم از تمامیت، در منطق مرتبه دوم صورت‌بندی شده است.) میدان‌های مرتب زیادی در ریاضیات وجود دارند، اما طبق قضیه دِدِکیند فقط یکی از آنها (در حد یکریختی) کامل است. فرض وجود یک میدان مرتب کامل به هیچ وجه بدیهی نیست. بسیاری از کتابهای آنالیز ریاضی با اصول میدان‌های مرتب کامل آغاز می‌شوند و میدان اعداد حقیقی را یک مدل آن در نظر می‌گیرند. البته این تنها راه در آنالیز حقیقی نیست، بلکه با حسابی سازی آنالیز می‌توان اعداد حقیقی را از اعداد گویا و اعداد گویا را از اعداد صحیح و نهایتاً اعداد صحیح را از اعداد طبیعی ساخت. به گفته کرونکر «اعداد طبیعی را خدا آفرید و مابقی کار انسان است». اکنون سوال اینست که چرا اعداد حقیقی را میدان مرتب کامل خدادادی در نظر نگیریم و بقیه را کار بشر بدانیم؟ چرا که با این فرض، هم می‌توان آنالیز حقیقی را داشت و آنگاه اعداد گویا را تحت عنوان کوچکترین میدان مشمول در میدان اعداد حقیقی، اعداد صحیح را به عنوان کوچکترین زیرحلقه‌ی یکدار میدان اعداد حقیقی و اعداد طبیعی را به عنوان مجموعه عناصر نامنفی اعداد صحیح ساخت! با این اوصاف، اعداد طبیعی چرا باید آسمانی‌تر (بهشتی‌تر) از اعداد حقیقی باشند؟ مساله دیگر اینست که می‌توان حتی پا را فراتر نهاد و اعداد طبیعی را به کمک مجموعه‌ها ساخت؛ بنابراین چرا نباید این چنین درنظر بگیریم که در حقیقت خدا مجموعه‌ها را آفرید و باقی کار را به دست بشر سپرد؟ فارغ از این دیدگاه‌های بنیادی و فلسفی، ما در این رساله به دنبال ویژگی‌های اعداد حقیقی به عنوان یک میدان مرتب کامل هستیم. در واقع صورت‌بندی‌های متعددی از میدان‌های مرتب کامل در منطق مرتبه دوم

روی نظریه میدان‌های مرتب وجود دارند. برای مثال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:
(۱) اصل وجود کوچکترین کران بالایی (هر زیرمجموعه ناتهی ازبالاکراندار دارای کوچکترین کران بالایی است)؛
(۲) اصل وجود بزرگترین کران پایینی (هر زیرمجموعه ناتهی ازپایین‌کراندار دارای بزرگترین کران پایین است)؛ و
(۳) اصل عدم وجود شکاف (اصل برش)؛ یک برش عبارت است از یک اِفراز متشکل از دو زیرمجموعه به طوری که هر عنصر مجموعه اول از هر عنصر مجموعه دوم کوچکتر بوده، مجموعه اول بزرگترین عضو نداشته و مجموعه دوم فاقد کوچکترین عضو باشد.

جالب اینکه تعداد زیادی جمله‌ی معادل با اصل پیوستار (کمال) وجود دارند ([۸]). در حقیقت، نظریه‌ی مرتبه اول اعداد حقیقی به عنوان میدان مرتب، همان نظریه‌ی میدان‌های مرتب بسته حقیقی است که کامل بودن (منطقی) آن توسط تارسکی ثابت شده است. بنابراین با صورت‌بندی مرتبه اول آنالیز مقدماتی بلافاصله به قسمت‌های پیشرفته جبر وارد می‌شویم. چنان‌که در این پایان‌نامه خواهیم دید، فرمول‌بندی مرتبه اول برخی صورت‌های اصل کمال می‌تواند منجر به اصل‌بندی‌های نظریه میدان‌های بسته حقیقی شود.

- در فصل ۲ این رساله سه نمونه از اصل استقراء پیوسته را دست‌چین می‌کنیم، چرا که تمام صورت‌های متفاوت این اصل، که در یک‌صد سال اخیر در متون ریاضی مشاهده شده‌اند، با یکی از این سه مورد معادل می‌باشند. نشان خواهیم داد که دو مورد از سه مورد فوق با هم معادل هستند که معادلی برای اصل کمال میدان‌های مرتب نیز می‌باشند. در حالی‌که مورد سوم ضعیف‌تر از این دو مورد می‌باشد. این سه طرح اصل موضوعی را در منطق مرتبه اول صورت‌بندی کرده و قدرت آن‌ها را با هم مقایسه خواهیم کرد. همچنین ثابت خواهیم کرد که اصل استقراء ضعیف از میان آن سه اصل، با اصل ارشمیدسی در گروه‌های آبلی مرتب معادل است.

- در فصل ۳ برهان‌هایی برای قضیه تارسکی ــ شوالی (تمامیت نظریه مرتبه اول میدان‌های

بسته جبری با مشخصه صفر یا همان نظریه میدان اعداد مختلط) و نیز قضیه تارسکی-سیدنبرگ (تمامیت نظریه مرتبه اول میدان‌های بسته حقیقی یا همان نظریه میدان مرتب اعداد حقیقی) ارایه می‌کنیم.

- در فصل ۴ به مطالعه برخی از صورت‌بندی‌های مرتبه اول اصل کمال (در میدان‌های مرتب) می‌پردازیم و به کمک اثبات‌های مرتبه اولی، معادل بودن آنها را با هم نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که صورت‌بندی مرتبه اول دو اصلِ معادلِ استقراء پیوسته می‌توانند نظریه میدان‌های بسته حقیقی (روی میدان‌های مرتب) را اصل‌بندی کنند و نیز یک طرح مرتبه اول از قضیه اساسی جبر را به عنوان معادل دیگری برای اصل‌بندی این نظریه روی میدان‌های مرتب، معرفی می‌کنیم.
- در فصل ۵ نتایج نو و قدیمی این رساله را جمع‌بندی نموده و هم‌چنین مجموعه‌ای از مسایل باز را برای پژوهش‌های آتی ارایه می‌کنیم.

فصل ۲

اصل کمال پیوستار حقیقی و صورت‌های معادل آن

۱.۲ اصل استقراء پیوسته

«استقراء پیوسته»، «استقراء روی پیوستار»، «استقراء حقیقی»، «استقراء غیرگسسته» و غیره عبارت‌هایی هستند که نویسندگان مختلف برای اشاره به استقراء روی پیوستار اعداد حقیقی از آنها بهره جسته‌اند. این عبارت‌ها (به عنوان اصل موضوع) به همان قدرت اصل کمال اعداد حقیقی هستند و انگیزه‌ی اصلی برای معرفی و بیان آنها در متون ریاضی، ارایه‌ی برهان‌های یک‌شکل و ساده برای بعضی از قضایای مقدماتی آنالیز ریاضی است.

در اینجا بر آن نیستیم تا تاریخچه مفصلی از موضوع و فهرست تمام متون مرتبط را لیست کنیم. به منظور اطلاع از تاریخچه‌ی مختصر این موضوع، خواننده را به مقاله ایرج کلانتری ([۱۴]) و جهت آشنایی با کلیت موضوع به منبع [۷] ارجاع می‌دهیم. قدیمی‌ترین استفاده از استقراء پیوسته احتمالا توسط چائو[۱] در سال ۱۹۱۹ صورت گرفته است ([۶]). در این پایان‌نامه اصل فوق را در منطق مرتبه اول فرمول‌بندی می‌کنیم. همچنین صورت‌بندی‌های اصل استقراء بیان شده در مراجع [۷، ۱۱، ۱۳، ۱۴] را فرمول‌بندی کرده و سپس قدرت ریاضی و استنتاجی آنها را با هم مقایسه می‌کنیم.

لازم است خاطرنشان کنیم که تنها کتاب به زبان فارسی که اشاراتی به اصل استقراء پیوسته دارد، به احتمال زیاد مرجع [۳۲] است.

اصل استقراء پیوسته بیان شده در [۶] و [۷] با صورت‌بندی زیر هم‌ارز است:

تعریف ۱.۱.۲. (CI_1)

برای هر $S\subseteq\mathbb{R}$، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. یک $a\in\mathbb{R}$ موجود باشد که $]-\infty,a]\subseteq S$، و

۲. یک $\epsilon>0$ موجود باشد که برای هر $x\in\mathbb{R}$ اگر $x\in S$ آنگاه $[x,x+\epsilon]\subseteq S$؛

آنگاه $S=\mathbb{R}$. ◇

استقراء پیوسته در [۷]، [۱۳] و [۱۴] هم‌ارز با مفهوم زیر است:

---

[۱] Chao

تعریف ۲.۱.۲. (CI)
برای هر $S\subseteq\mathbb{R}$، اگر شرایط زیر برقرار باشند:
۱. برای یک $a\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $]-\infty,a[\subseteq S$، و
۲. برای هر $x\in\mathbb{R}$ اگر $]-\infty,x[\subseteq S$ آنگاه یک $\epsilon>0$، موجود باشد که $]-\infty,x+\epsilon[\subseteq S$؛
آنگاه $S=\mathbb{R}$. ◊

نکته ۳.۱.۲. خاطرنشان می‌کنیم که این صورت از استقراء حقیقی را می‌توان صرفاً با استفاده از نماد رابطه‌ای $>$ فرمول‌بندی کرد:
برای هر $S\subseteq\mathbb{R}$، اگر شرایط زیر برقرار باشند:
۱. یک $a\in\mathbb{R}$ موجود است که $]-\infty,a[\subseteq S$، و
۲. برای هر $x\in\mathbb{R}$ اگر $]-\infty,x[\subseteq S$ آنگاه یک $y>x$ موجود است که $]-\infty,y]\subseteq S$؛
آنگاه $S=\mathbb{R}$. ◊

در نهایت، نسخه سومی از اصل استقراء وجود دارد که در مرجع [۱۱] بدان اشاره شده است:

تعریف ۴.۱.۲. ($\mathtt{CI}_2$)
برای هر $S\subseteq\mathbb{R}$، اگر شرایط زیر برقرار باشند:
۱. یک $a\in\mathbb{R}$ موجود باشد که $]-\infty,a]\subseteq S$،
۲. برای هر $x\in\mathbb{R}$ اگر $]-\infty,x]\subseteq S$ آنگاه یک $y>x$ موجود است که $]-\infty,y[\subseteq S$، و
۳. برای هر $x\in\mathbb{R}$ اگر $]-\infty,x[\subseteq S$ آنگاه $x\in S$؛
آنگاه $S=\mathbb{R}$. ◊

۲.۲ صورت‌های مرتبه اول استقراء پیوسته

صورت‌بندی مرتبه اول این اصل در زبان‌های مرتبه اول $\mathcal{L}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

تعریف ۱.۲.۲. $(\mathtt{DCI}_1)$
طرح اصل موضوعی زیر را استقراء پیوسته تعریف‌پذیر روی زبان $\mathcal{L} \supseteq \{<, 0, +\}$، $\mathtt{DCI}_1(\mathcal{L})$، درنظر می‌گیریم:

$$\exists x\, \forall y \leqslant x\, \varphi(y) \;\wedge\; \exists \epsilon > 0\, \forall x \big(\varphi(x) \to \forall y\, [x \leqslant y \leqslant x + \epsilon \to \varphi(y)]\big) \longrightarrow \forall x\, \varphi(x)$$

که در آن φ یک $\mathcal{L}$ـ فرمول دلخواه است. $\diamondsuit$

صورت‌بندی مرتبه اول CI به شکل زیر است:

تعریف ۲.۲.۲. $(\mathtt{DCI})$
برای زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ شامل نماد محمولی $<$، طرح مرتبه اول $\mathtt{DCI}(\mathcal{L})$ به‌صورت زیر است:

$$\exists x\, \forall y < x\, \varphi(y) \;\wedge\; \forall x \big[\forall y < x\, \varphi(y) \to \exists z > x\, \forall y < z\, \varphi(y)\big] \longrightarrow \forall x\, \varphi(x)$$

که در آن φ یک $\mathcal{L}$ـ فرمول دلخواه است. $\diamondsuit$

وقتی زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ شامل 0 و $+$ باشد می‌توان DCI را به‌صورت زیر نیز فرمول‌بندی کرد:

$$\exists x\, \forall y < x\, \varphi(y) \;\wedge\; \forall x \big[\forall y < x\, \varphi(y) \to \exists \epsilon > 0\, \forall y < x + \epsilon\, \varphi(y)\big] \longrightarrow \forall x\, \varphi(x)$$

ذکر این نکته ضروری است که در $\mathtt{DCI}_1(\mathcal{L})$ یک $\epsilon > 0$ ثابت وجود دارد که برای تمام x های فرض دوم کار می‌کند. اما در $\mathtt{DCI}(\mathcal{L})$ برای هر x یک $\epsilon_x > 0$ (وابسته به x) وجود دارد که برای فرض قسمت دوم کار می‌کند.

تعریف ۳.۲.۲. ($\texttt{DCI}_2$)
طرح اصل موضوعی $\texttt{DCI}_2(\mathcal{L})$ را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\exists x\,\forall y{\leqslant}x\,\varphi(y) \wedge \forall x\big[\forall y{\leqslant}x\,\varphi(y) \rightarrow \exists z{>}x\,\forall y{<}z\,\varphi(y)\big] \wedge \forall x[\forall y{<}x\,\varphi(y) \rightarrow \varphi(x)]$$

$\longrightarrow \forall x\,\varphi(x)$ که در آن، φ یک $\mathcal{L}$ـ فرمول دلخواه است. $\diamondsuit$

اکنون به مقایسه این سه اصل می‌پردازیم.

قضیه ۴.۲.۲. ($\mathit{DCI} \Longleftrightarrow \mathit{DCI}_2$)
در هر ساختار مرتب خطی $\langle D;\mathcal{L}\rangle$ که زبان $\mathcal{L}$ شامل نماد محمولی $<$ است، طرح اصل موضوعی $\mathit{DCI}(\mathcal{L})$ برقرار است اگروتنها اگر طرح اصل موضوعی $\mathit{DCI}_2(\mathcal{L})$ برقرار باشد.

برهان. اثبات $\texttt{DCI}_2 \Longrightarrow \texttt{DCI}$ نسبتاً آسان است. برای اثبات $\texttt{DCI} \Longrightarrow \texttt{DCI}_2$ فرض می‌کنیم $\texttt{DCI}_2$ در یک ساختار مرتب خطی $\langle D;<\rangle$ برقرار باشد و نیز فرض می‌کنیم برای $\mathcal{L}$ـ فرمول $\varphi(x)$ و یک $a\in D$ داشته باشیم:

الف) $\forall y{<}a\,\varphi(y)$، و

ب) $\forall x\big[\forall y{<}x\,\varphi(y) \rightarrow \exists z{>}x\,\forall y{<}z\,\varphi(y)\big]$.

حال نشان می‌دهیم روابط زیر برقراراند:

(۱) $\exists x\,\forall y{\leqslant}x\,\psi(y)$،

(۲) $\forall x\big[\forall y{\leqslant}x\,\psi(y) \rightarrow \exists z{>}x\,\forall y{<}z\,\psi(y)\big]$، و

(۳) $\forall x[\forall y{<}x\,\psi(y) \rightarrow \psi(x)]$.

این مطلب، با استفاده از $\texttt{DCI}_2(\mathcal{L})$ نشان می‌دهد $\forall x\,\varphi(x)$ برقرار است. رابطه (۲) به طور مستقیم از قسمت (ب) به‌دست می‌آید. برای اثبات درستی (۳)، عضو ثابت $d\in D$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\forall y{<}d\,\varphi(y)$ برقرار باشد. در این‌صورت $d'{>}d$ وجود دارد به طوری‌که وقتی $\varphi(d)$ برقرار است داشته باشیم $\forall y{<}d'\,\varphi(y)$. با استدلالی کاملاً مشابه می‌بینیم که رابطه (۱) برای $x=a$ درست است. $\square$

بنابر اثبات قضیه، $\mathtt{CI}$ و $\mathtt{CI}_2$ در هر ساختار مرتب خطی با هم معادل هستند. اکنون نشان می‌دهیم $\mathtt{CI}_1$ به‌طور اکید ضعیف‌تر از $\mathtt{CI}$ (و به‌طور معادل $\mathtt{CI}_2$) می‌باشد.

قضیه ۵.۲.۲. ($DCI \not\Longleftrightarrow DCI_1$)
در هر $\mathcal{L}$ـ ساختار به شکل $\langle D;+.0,<,...\rangle$ که $\mathcal{L}\supseteq\{+,0,<\}$ و $\langle D;+.0,<\rangle$ یک گروه آبلی مرتب بخشپذیر است، اگر $DCI(\mathcal{L})$ برقرار باشد $DCI_1(\mathcal{L})$ نیز برقرار است. اما عکس آن درست نیست: برای $\mathcal{L}_{OF}=\{+,0,-,<,\times,1\}$ زبان میدان‌های مرتب، طرح $DCI_1(\mathcal{L}_{OF})$ در $\langle\mathbb{Q};\mathcal{L}_{OF}\rangle$ برقرار است اما $DCI(\mathcal{L}_{OF})$ چنین نیست.

برهان. فرض کنیم $\mathtt{DCI}(\mathcal{L})$ در ساختار $\langle D;+,0,<,...\rangle$ برقرار باشد. به منظور اثبات درستی $\mathtt{DCI}_1(\mathcal{L})$ فرض می‌کنیم برای یک $\mathcal{L}$ـ فرمول φ، $a\in D$ و $\epsilon>0$ داشته باشیم:

(i) $\forall y\leqslant a\,\varphi(y)$، و

(ii) $\forall x\big(\varphi(x)\rightarrow\forall y\,[x\leqslant y\leqslant x+\epsilon\rightarrow\varphi(y)]\big)$.

در این‌صورت (۱) $\forall y<a\,\varphi(y)$ برقرار است و ما به‌صورتی که در زیر می‌آید نشان می‌دهیم (۲) $\forall x\big[\forall y<x\,\varphi(y)\rightarrow\exists z>x\,\forall y<z\,\varphi(y)\big]$ نیز برقرار است: فرض می‌کنیم برای یک b ثابت متعلق به D داشته باشیم $\forall y<b\,\varphi(y)$. آنگاه نتیجه می‌گیریم $\varphi(b-\frac{\epsilon}{2})$، و (ii) ایجاب می‌کند که $\forall y\,[b-\frac{\epsilon}{2}\leqslant y\leqslant b+\frac{\epsilon}{2}\rightarrow\varphi(y)]$. به طوری‌که برقراری $\forall y<b+\frac{\epsilon}{2}\,\varphi(y)$ درستی (۲) را نتیجه می‌دهد. بنابراین $\mathtt{DCI}(\mathcal{L})$ به کمک (۱) و (۲)، $\forall x\,\varphi(x)$ را نتیجه می‌دهد.
حال نشان می‌دهیم $\mathtt{DCI}_1(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}})$ در $\mathbb{Q}$ درست است اما $\mathtt{DCI}(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}})$ چنین نیست.
برای اثبات $\mathbb{Q}\vDash\mathtt{DCI}_1(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}})$ فرض می‌کنیم برای فرمول φ و $\epsilon,r\in\mathbb{Q}$ که $\epsilon>0$ داریم:
(i) $\forall y\leqslant r\,\varphi(y)$ و (ii) $\forall x\big(\varphi(x)\rightarrow\forall y\,[x\leqslant y\leqslant x+\epsilon\rightarrow\varphi(y)]\big)$.
با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم $\forall x\,\varphi(x)$ در $\mathbb{Q}$ درست است؛ اگر چنین نباشد آنگاه مجموعه $\mathcal{A}=\{q\in\mathbb{Q}\mid\neg\varphi(q)\}$ ناتهی و r کران پایینی برای آن است.
قرار می‌دهیم $\alpha=\inf\mathcal{A}(\in\mathbb{R})$. بنابراین s و t موجوداند که $s\in\mathcal{A}$ و $\alpha<s<\alpha+\frac{\epsilon}{2}$ و نیز $t\in\mathbb{Q}$ که $\alpha-\frac{\epsilon}{2}<t<\alpha$. از $t<\alpha=\inf\mathcal{A}$ نتیجه می‌گیریم $t\notin\mathcal{A}$. بنابراین $\varphi(t)$ درست است. پس، طبق

(ii) به ازای هر $y\in[t,t+\epsilon]$، $\varphi(y)$ برقرار است و چون از قبل می‌دانیم $t<\alpha<s<\alpha+\frac{\epsilon}{2}<t+\epsilon$ پس $\varphi(s)$ نیز درست می‌باشد که این امر متناقض با $s\in\mathcal{A}$ است.

اکنون نشان می‌دهیم $\mathtt{DCI}(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}})$ در $\langle\mathbb{Q};\mathcal{L}_{\mathtt{OF}}\rangle$ درست نیست.

قرار می‌دهیم (۱) $[x<0\vee x^2<2]=\varphi(x)$. واضح است که $\forall y<0\,\varphi(y)$ درست است.

و نشان می‌دهیم (۲) $\forall x\big[\forall y<x\,\varphi(y)\rightarrow\exists\epsilon>0\,\forall y<x+\epsilon\,\varphi(y)\big]$ نیز درست می‌باشد. اما به وضوح $\forall x\,\varphi(x)$ برقرار نیست زیرا $\varphi(2)$ درست نیست؛ همین امر نشان می‌دهد $\mathtt{DCI}(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}})$ در $\mathbb{Q}$ درست نیست.

برای نشان دادن درستی (۲)، $r\in\mathbb{Q}$ را ثابت درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\forall y<r\,\varphi(y)$. با مجزا کردن سه حالت زیر نشان می‌دهیم $\exists\epsilon>0\,\forall y<r+\epsilon\,\varphi(y)$ برقرار است:

(الف) اگر $r<0$ آنگاه برای $\epsilon=-\frac{r}{2}$ داریم $\forall y<r+\epsilon\,\varphi(y)$.

(ب) اگر $r=0$ آنگاه برای $\epsilon=1$ داریم $\forall y<r+\epsilon\,\varphi(y)$.

(ج) اگر $r>0$ آنگاه $r^2<2$؛ زیرا $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ پس $r^2=2$ نامکن است.

همچنین $r^2>2$ نیز نمی‌تواند درست باشد چرا که برای $y=\frac{r^2+2}{2r}$ به‌دست می‌آوریم: $0<y<r$ و $y^2-2=(\frac{r^2-2}{2r})^2>0$. بنابراین $\forall y<r\,\varphi(y)$ درست نیست. با درنظرگرفتن $\epsilon=\min\{1,\frac{2-r^2}{2r+1}\}$ داریم $0<\epsilon\leqslant 1$. برای اثبات $\forall y<r+\epsilon\,\varphi(y)$ یک y با شرط $0\leqslant y<r+\epsilon$ درنظر می‌گیریم. به‌راحتی می‌بینیم $y^2-2<(r+\epsilon)^2-2=(r^2-2)+\epsilon(2r+\epsilon)\leqslant(r^2-2)+\epsilon(2r+1)\leqslant(r^2-2)+(2-r^2)=0$. پس $y^2<2$، بنابراین برای هر $y<r+\epsilon$، $\varphi(y)$ درست است. $\square$

نشان می‌دهیم که $\mathtt{CI}_1$ با خاصیت ارشمیدسی در گروه‌های آبلی مرتب، معادل است.

تعریف ۶.۲.۲. (خاصیت ارشمیدسی، $\mathtt{AP}$)

گروه آبلی مرتب $\langle G;+,0,<\rangle$ خاصیت ارشمیدسی دارد هرگاه برای هر $a,b\in G$ که $a>0$ یک $n\in\mathbb{N}$ موجود باشد که $b<n\centerdot a$. در اینجا طبق تعریف $n\centerdot a=\underbrace{a+\cdots+a}_{n-\text{times}}$. $\diamondsuit$

قضیه ۷.۲.۲. ($AP\iff CI_1$)

یک گروه آبلی مرتب خاصیت ارشمیدسی دارد اگروتنها اگر در طرح اصل موضوعی CI_1 صدق کند.

برهان. فرض کنید گروه آبلی مرتب $\langle G;+,0,<\rangle$ خاصیت ارشمیدسی (AP) داشته باشد و برای $\mathcal{A}\subseteq G$ و $\epsilon,a\in G$ که $\epsilon>0$ داشته باشیم (الف) $]-\infty,a]\subseteq\mathcal{A}$ و (ب) برای هر $x\in G$ اگر $x\in\mathcal{A}$ آنگاه $[x,x+\epsilon]\subseteq\mathcal{A}$. با استقراء بر روی $n\in\mathbb{N}$ می‌توان نشان داد (ج) $]-\infty,a+n\centerdot\epsilon]\subseteq\mathcal{A}$ درست است؛ برای $n=0$ از (الف) و گام استقراء از (ب) نتیجه می‌شود. برای $x\in G$ دلخواه، طبق AP یک $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری‌که $x-a<n\centerdot\epsilon$؛ پس طبق (ج) داریم $x\in\mathcal{A}$. پس داریم $\mathcal{A}=G$؛ بنابراین $\mathtt{CI}_1$ در G درست است.

حال، فرض کنید $\mathtt{CI}_1$ در گروه آبلی مرتب $\langle G;+,0,<\rangle$ صدق کند. برای هر $a,b\in G$ که $a>0$ قرار دهید $\mathcal{B}=\{x\in G\mid\exists n\in\mathbb{N}:\ x<n\centerdot a\}$. در این صورت به‌وضوح، داریم (الف) $]-\infty,0]\subseteq\mathcal{B}$ ؛ و نشان می‌دهیم (ب) برای هر $x\in G$ اگر $x\in\mathcal{B}$ آنگاه $[x,x+a]\subseteq\mathcal{B}$. برای هر $x\in\mathcal{B}$ داریم: برای یک $m\in\mathbb{N}$، $x<m\centerdot a$؛ بنابراین برای هر $y\in[x,x+a]$ داریم $y\leqslant x+a<(m+1)\centerdot a$ و بنابراین خواهیم داشت $y\in\mathcal{B}$. پس طبق $\mathtt{CI}_1$، از (الف) و (ب) باید داشته باشیم $\mathcal{B}=G$ و بنابراین برای هر $b\in G$ وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ به‌طوری‌که $b<n\centerdot a$؛ پس G خاصیت AP دارد. $\square$

لازم به ذکر است که قضیه ۷.۲.۲ اثبات دیگری برای $\mathbb{Q}\vDash\mathtt{CI}_1$ (همچنین $\mathbb{Q}\vDash\mathtt{DCI}_1$) ارایه می‌دهد که قبلاً در قضیه ۵.۲.۲ اثبات کردیم. بنابراین، تعریف ۱.۱.۲ ($\mathtt{CI}_1$) را می‌توان به لیست ۴۲ تایی از صورت‌های معادل خاصیت ارشمیدسی (در میدان‌های مرتب) در [۸]، اضافه کرد. اصل استقراء بیان شده در تعاریف ۲.۱.۲ و ۴.۱.۲ (به ترتیب CI و $\mathtt{CI}_2$) معادل با اصل کمال میدان‌های مرتب می‌باشند در حالیکه اصل بیان شده در تعریف ۱.۱.۲، ($\mathtt{CI}_1$)، با خاصیت ارشمیدسی در میدان‌های مرتب معادل است پس با اصل کمال هم ارز نیست. بنابر قضیه فوق نمی‌توان $\mathtt{CI}_1$ را یک نسخه واقعی از استقراء پیوسته به شمار آورد. اما چون در $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{N}$ برقرار نیست می‌توان آن‌را یک استقراء غیرگسسته درنظرگرفت. هم‌چنین با توجه به اینکه روی $\mathbb{Q}$ برقرار است استقراء پیوسته هم نمی‌باشد.

فصل ۳

میدان‌های بسته جبری و بسته حقیقی

۱.۳ میدان‌های بسته جبری و قضیه تارسکی ـ شِوالی

تعریف ۱.۱.۳. (ACF)
برای $n\in\mathbb{N}$ و $n>1$ طرح اصل موضوع $\forall\{a_i\}_{i\leqslant n}\,\exists x\,(x^n+\sum_{i\leqslant n-1}a_ix^i=0)$ را به‌همراه اصول میدان‌ها (F) درنظر می‌گیریم. هر میدانی که این اصل را ارضاء کند میدان بسته جبری نامیده می‌شود. $\diamondsuit$

در این بخش نشان می‌دهیم که نظریه میدان‌های بسته جبری با مشخصه صفر در زبان میدان‌ها $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}=\{+,0,-,\times,1\}$ خاصیت حذف سور دارد. برای این منظور از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۲.۱.۳. *اگر $\mathfrak{p}(\bar{x},x)$ و $\mathfrak{q}(\bar{x},x)$ دو ترم در زبان $\mathcal{L}_F$ باشند یعنی چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب در اعداد صحیح، آنگاه $\mathcal{L}_F$ ـ فرمول خالی از سور $\varphi(\bar{\xi})$ چنان وجود دارد که $\varphi(\bar{\xi})$ درست است اگروتنها اگر چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(\bar{\xi},x)$ چندجمله‌ای $\mathfrak{q}(\bar{\xi},x)$ را عاد کند.*

برهان. برای a_i و b_jها که همگی چندجمله‌ای‌های با ضرایب از اعداد صحیح و بر حسب $x_1,...,x_k$ می‌باشند، ترم‌های $\mathfrak{p}(x)$ و $\mathfrak{q}(x)$ را مطابق زیر درنظر می‌گیریم:
$\mathfrak{p}(x):=a_0+a_1x+...+a_mx^m$ و $\mathfrak{q}(x):=b_0+b_1x+...+b_nx^n$. فرمول φ موردنظر را با استقراء روی $m+n$ به‌دست می‌آوریم. واضح است که اگر $m+n=0$ آنگاه داریم $\varphi=(a_0\neq 0\vee b_0=0)$. حال فرض می‌کنیم فرمول φ را با خاصیت موردنظر برای حالتی که $m+n<h$ است، یافته‌ایم و چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{p}(x)$ و $\mathfrak{q}(x)$ را با شرط $m+n=h$ داریم. دو حالت درنظر می‌گیریم:

$(\star)$ فرض کنیم $n<m$ باشد. قرار می‌دهیم $\mathfrak{p}_1(x):=a_0+a_1x+...+a_{m-1}x^{m-1}$ و $\mathfrak{q}(x)$ همان‌که در بالا اشاره شد. طبق فرض استقراء چون مجموع درجات این دو چندجمله‌ای از h کمتر است پس فرمول خالی از سور φ' برای $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{q}$ موجود است. بنابراین فرمول موردنظر برای $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ عبارت است از $(a_m=0\wedge\varphi')\vee(a_m\neq 0\wedge b_0=b_1=...=b_n=0)$.

$(\star\star)$ فرض می کنیم $m\leq n$ باشد. قرار می‌دهیم $\mathfrak{p}_1(x):=a_0+a_1x+...+a_{m-1}x^{m-1}$ و

$\mathfrak{q}_1(x) := a_m\mathfrak{q}(x) - b_n x^{n-m} \cdot \mathfrak{p}(x)$. واضح است که $\mathfrak{q}_1$ از درجه کمتر از n است. مجموع درجات $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{q}$ و مجموع درجات $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}_1$ از h کمتر هستند. بنابر فرض استقراء فرمول‌های خالی از سور φ' و φ'' به‌ترتیب برای $\mathfrak{p}_1$، $\mathfrak{q}$ و $\mathfrak{p}$، $\mathfrak{q}_1$ وجود دارند که خاصیت مورد نظر را داشته باشند. پس فرمول نهایی برای $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ به‌صورت $(a_m = 0 \wedge \varphi') \vee (a_m \neq 0 \wedge \varphi'')$ می‌باشد. $\square$

قضیه ۳.۱.۳. (ACF_0 *کامل است.*)

نظریه میدان‌های بسته جبری با مشخصه صفر خاصیت حذف سور دارد.

برهان. اثبات را به کمک حذف سور انجام می‌دهیم؛ یعنی ثابت می‌کنیم هر فرمول در زبان میدان‌ها معادل است با یک فرمول خالی از سور که متغیرهای آزاد آن با متغیرهای آزاد فرمول قبلی یکسان است. چون این نظریه می‌تواند جمله‌های خالی از سور را تصمیم بگیرد (اثبات یا رد کند) پس قضیه حذف سور نشان می‌دهد که این نظریه می‌تواند هر جمله‌ی این زبان را تصمیم بگیرد؛ یعنی یا جمله را اثبات کند یا نقیض آن را.

برای این‌کار کافیست نشان دهیم هر فرمول به شکل $\exists x\, \theta(x)$ که θ ترکیب عطفی فرمول‌های اتمی و نقیض اتمی است، با یک فرمول خالی از سور معادل است (با متغیرهای آزاد یکسان). برای این منظور فرض کنید چنین فرمولی با یک فرمول خالی از سور معادل باشد در این‌صورت با استقراء بر روی پیچیدگی فرمول ψ می‌توان نشان داد ψ با فرمول خالی از سور معادل است؛ حالتی را که در آن فرمول‌ها اتمی و رابطها گزاره‌ای، $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$، باشند بدیهی است. حالت $\forall$ را می‌توان به کمک $\forall x\, \psi(x) \equiv \neg\exists x \neg\psi(x)$ به $\exists$ تحویل کرد. در نهایت نشان می‌دهیم فرمول $\exists x\, \psi(x)$ با یک فرمول خالی از سور معادل است که ψ یک فرمول فاقد سور است. فرمول ψ را به‌صورت نرمال فصلی $\bigvee_i \theta_i$ می‌نویسیم که هر فرمول θ_i ترکیبی عطفی از تعدادی فرمول اتمی یا نقیض اتمی است. پس داریم $\exists x\, \psi(x) \equiv \exists x \bigvee_i \theta_i \equiv \bigvee_i \exists x\, \theta_i$ و نیز طبق فرض استقراء، فرمول $\exists x\, \theta_i$ معادل با یک فرمول خالی از سور می‌باشند و در نتیجه کل فرمول چنین است. فرض کنید فرمول φ در زبان $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$ به‌صورت $\exists x(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)$ باشد. که هر α_i یک فرمول اتمی یا نقیض اتمی زبان $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$ است. پس هر α_i به‌صورت $t_1 = t_2$ یا $t_1 \neq t_2$ است. که این دو فرمول، وقتی که t را

قرار داده‌ایم $t := t_1 - t_2$، به‌ترتیب با $t = 0$ و $t \neq 0$ معادل هستند. چون $t_1 \neq 0 \wedge .... \wedge t_u \neq 0$ معادل با $\underbrace{t_1 \cdots t_u}_{t} \neq 0$ است پس فرمول φ با $\exists x(t_1 = 0 \wedge .... \wedge t_k = 0 \wedge t \neq 0)$ هم‌ارز است.
می‌دانیم هر t_i یک چندجمله‌ای بر حسب x است با ضرایبی که آنها هم چندجمله‌ای‌هایی هستند بر حسب متغیرهای دیگر و با ضرایب از اعداد صحیح. اگر جمله ظاهر شده در t_i که بیشترین درجه را دارد با $a_i x^{n_i}$ نشان دهیم، می‌توان فرض کرد که $n_i \neq 0$ زیرا در غیر این‌صورت t_i به یک ثابت هم‌چون a_0 بدل می‌شود که چون در φ داریم $t_i = 0$ پس $a_0 = 0$ به‌دست می‌آید که ما از این حالت تباهیده دوری می‌کنیم. حال با استقراء روی مجموع n_iها، که رتبه φ نامیده می‌شود، اثبات را ادامه می‌دهیم.
اگر $k \geq 0$ (تعداد $t = 0$ها بزرگتر یا مساوی صفر باشد) آنگاه با فرض $n_1 \geq n_2$ قرار می‌دهیم: $t_1' := a_2 t_1 - a_1 x^{(n_1 - n_2)} \cdot t_2$ و $t_2' := t_2 - a_2 x^{n_2}$. واضح است که درجه t_1' کمتر از n_1 و درجه t_2' کمتر از n_2 است. در این حالت فرمول φ معادل با فرمول زیر است:

$$[a_2 = 0 \wedge \exists x(t_1 = 0 \wedge t_2' = 0 \wedge ... \wedge t_k = 0 \wedge t \neq 0)] \bigvee$$
$$[a_2 \neq 0 \wedge \exists x(t_1' = 0 \wedge t_2 = 0 \wedge ... \wedge t_k = 0 \wedge t \neq 0)].$$

که این دو فرمول رتبه کمتری دارند.

$(\star)$ اگر $k = 1$ باشد آنگاه می‌توان φ را به‌صورت $\exists x(t_1 = 0 \wedge t \neq 0)$ نوشت. می‌دانیم در هر میدان بسته جبری برای چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{p}(x)$ و $\mathfrak{q}(x)$، یک x_0 موجود است که $\mathfrak{p}(x_0) = 0$ و اگر $\mathfrak{q}(x_0) \neq 0$، این مطلب معادل است با اینکه $\mathfrak{p}$ چندجمله‌ای $\mathfrak{q}^{\mathfrak{n}}$ را نمی‌شمارد ($\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{q}^{\mathfrak{n}}$). در اینجا n درجه چندجمله‌ای $\mathfrak{p}$ بر حسب متغیر x است. حال اگر φ' همان فرمول خالی از سوری باشد که در لم قبل برای t و t_1^n (در اینجا $t = 0$، $t_1 \neq 0$ و n درجه t است) به‌دست آمده است، آنگاه چون $t \nmid t_1^n$ پس فرمول موردنظر، $\neg\varphi'$ خواهد بود.

$(\star\star)$ اگر $k = 0$ باشد آنگاه فرمول φ معادل $\exists x(t \neq 0)$ است. قرار می‌دهیم $t := a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. از آنجا که میدان‌های بسته جبری نامتناهی هستند و هر چندجمله‌ای یک متغیره نامتحد با صفر، تعداد متناهی ریشه در یک میدان بسته جبریِ دلخواه دارد، پس فرمول φ معادل است با $a_0 \neq 0 \vee .... \vee a_n \neq 0$. $\square$

بدین ترتیب دیدیم که در زبان $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$ هر فرمولی، از جمله فرمول‌های بسته، معادل خالی از سور دارند. وقتی فرمولی بسته است و معادل خالی از سور دارد، یعنی فقط شامل ثوابت است و برای یک n متعلق به اعداد طبیعی به‌صورت $n = 0$ نوشته می‌شود.

۲.۳ میدان‌های بسته حقیقی و قضیه تارسکی-سِیدِنبِرگ

آنچه که میدان‌های بسته حقیقی را برای منطق ریاضی جذاب می‌کند قضیه‌ی تارسکی است: نظریه‌ی کاملِ مرتبه اولِ میدان مرتب اعداد حقیقی، $\mathrm{Th}\langle\mathbb{R}; +, 0, -, <, \times, 1\rangle$، تصمیم‌پذیر بوده و توسط نظریه‌ی میدان‌های مرتب بسته حقیقی اصل‌پذیر می‌باشد ([۱۵]). میدان‌های بسته حقیقی، در جبر و هندسه جبری مورد مطالعه قرار می‌گیرند ([۲، ۳]) و ما در این بخش به بعضی از اصل‌بندی‌های معادل نظریه‌ی مرتبه اول آنها اشاره می‌کنیم. پرکاربردترین و مفیدترین تعریف میدان‌های بسته حقیقی، تعریفی است که بیان می‌کند یک میدان بسته حقیقی میدان مرتبی است که قضیه مقدار میانی، `IVT`، در آن برقرار باشد:

تعریف ۱.۲.۳. (`IVT`)
صورت‌بندی مرتبه اول زیر از قضیه مقدار میانی را `IVT` می‌نامیم:

$$\forall \mathfrak{p}\, \forall u, v\, \exists x\, [u<v \wedge \mathfrak{p}(u)\cdot\mathfrak{p}(v)<0 \longrightarrow u<x<v \wedge \mathfrak{p}(x)=0],$$

وقتی که منظور از $\forall\mathfrak{p}$ همان $\forall\{a\}_{i\leqslant m}$ است برای چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)=\sum_{i\leqslant m} a_i x^i$. $\diamondsuit$

ترم‌های شامل متغیر x در زبان میدان‌های مرتب، $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}} = \{+, 0, -, <, \times, 1\}$، چندجمله‌ای‌های به‌صورت $\mathfrak{p}(x) = \sum_{i\leqslant m} a_i x^i$ می‌باشند که a_i ها ترم‌های خالی از x هستند. به عنوان کاربردهایی از `IVT`، برخی از قضایای آنالیز حقیقی که به‌صورت جبری اثبات شده‌اند را بررسی می‌کنیم ([۲]).

تعریف ۲.۲.۳. (مشتق)
مشتق چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ برابر است با چندجمله‌ای $\mathfrak{p}'(x)=\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. $\diamondsuit$

نکته ۳.۲.۳. (برخی ویژگی‌های مشتق)
برای چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{p}(x)=\sum_{i\leqslant n} a_i x^i$ و $\mathfrak{q}(x)=\sum_{j\leqslant m} b_j x^j$ داریم:

- $(a\mathfrak{p})'=a\mathfrak{p}'$ برای یک ثابت (یک ترم خالی از x) مانند a،
- $(\mathfrak{p}+\mathfrak{q})'=\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'$، و
- $(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})'=(\mathfrak{p}'\cdot\mathfrak{q})+(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}')$؛

که به راحتی قابل اثبات هستند. برای مثال، می‌توان مورد آخر را به این‌صورت بررسی کرد که ضریب x^{k-1} در عبارت $(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})'$ برابر است با $k\sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} k a_i b_{k-i} =$
$=\sum_{i=0}^{k}[i a_i b_{k-i}+(k-i)a_i b_{k-i}]=[\sum_{i=0}^{k}(i a_i)b_{k-i}]+[\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(j b_j)].$
که جمع‌وند اول، ضریب x^{k-1} در $(\mathfrak{p}'\cdot\mathfrak{q})$ بوده و جمع‌وند دوم، ضریب $(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}')$ است. $\diamondsuit$
واضح است که ویژگی‌های اشاره شده در ۳.۲.۳ در حسابان مقدماتی تحت عنوان روش‌های آنالیزی ([۲۴]) آموزش داده می‌شوند. در ادامه قضیه و لم زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۳. ($\texttt{IVT} \Longrightarrow \texttt{Rolle}+\texttt{MVT}+\texttt{Signs Derivative}$)
فرض کنید IVT *درمیدان مرتب F صادق باشد. چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)$ را با ضرایب در F و نیز $a,b\in F$ که $a<b$ را درنظر بگیرید.*

قضیه رول: *اگر $\mathfrak{p}(a)=\mathfrak{p}(b)=0$ آنگاه برای یک $c\in]a,b[$ داریم $\mathfrak{p}'(c)=0$.*

قضیه مقدار میانگین: عضو $c\in]a,b[$ *وجود دارد که* $\mathfrak{p}'(c)=\frac{\mathfrak{p}(b)-\mathfrak{p}(a)}{b-a}$

تغییرعلامت مشتق: *اگر برای هر $x\in]a,b[$، داشته باشیم $\mathfrak{p}'(x)>0$ (به‌ترتیب، $\mathfrak{p}'(x)<0$) آنگاه برای $u,v\in F$ که $a<u<v<b$، داریم $\mathfrak{p}(u)<\mathfrak{p}(v)$ (به‌ترتیب، $\mathfrak{p}(u)>\mathfrak{p}(v)$).*

برهان. در ارتباط با قضیه رول لازم به یادآوری است که چون هر چندجمله‌ای فقط تعداد متناهی ریشه دارد، پس می‌توان فرض کرد چندجمله‌ای $\mathfrak{p}$ در بازه باز $]a,b[$ ریشه ندارد. حال، طبق فرض $\mathfrak{p}(a)=\mathfrak{p}(b)=0$، هر دوی $(x-a)$ و $(x-b)$ چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)$ را می‌شمارند؛ m را بزرگترین عددی بگیرید که $(x-a)^m$ چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)$ را می‌شمارد و n را بزرگترین عددی بگیرید که $(x-b)^n$ چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)$ را بشمارد. در این صورت، برای چندجمله‌ای $\mathfrak{q}(x)$ که هیچ ریشه ای در $]a,b[$ ندارد، می‌توان نوشت $\mathfrak{p}(x)=(x-a)^m(x-b)^n\mathfrak{q}(x)$. بنابراین طبق `IVT` داریم $\mathfrak{q}(a)\mathfrak{q}(b)>0$. ازین‌رو، طبق ۳.۲.۳، داریم $\mathfrak{p}'(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\mathfrak{r}(x)$ جایی‌که $\mathfrak{r}(x)=m(x-b)\mathfrak{q}(x)+n(x-a)\mathfrak{q}(x)+(x-a)(x-b)\mathfrak{q}'(x)$. با قراردادن a و b به‌جای x داریم $\mathfrak{r}(a)\mathfrak{r}(b)=m(a-b)\mathfrak{q}(a)n(b-a)\mathfrak{q}(b)=-mn(b-a)^2\mathfrak{q}(a)\mathfrak{q}(b)<0$. مطابق `IVT` یک عنصر $c\in]a,b[$ وجود دارد که $\mathfrak{r}(c)=0$ و از آنجا $\mathfrak{p}'(c)=0$ به دست می‌آید.

به طور سنتی، قضیه مقدار میانگین از قضیه رول به دست می‌آید: به این‌صورت که قرار می‌دهیم $\mathfrak{q}(x)=\mathfrak{p}(x)-\frac{\mathfrak{p}(b)-\mathfrak{p}(a)}{b-a}x$ و $\mathfrak{r}(x)=\mathfrak{q}(x)-\mathfrak{q}(a)$. داریم $\mathfrak{q}(a)=\mathfrak{q}(b)$ و $\mathfrak{r}(a)=\mathfrak{r}(b)=0$؛ همچنین $\mathfrak{r}'(x)=\mathfrak{q}'(x)=\mathfrak{p}'(x)-\frac{\mathfrak{p}(b)-\mathfrak{p}(a)}{b-a}$.

تغییر علامت مشتق به راحتی از قضیه مقدار میانگین به دست می‌آید: برای هر u,v، صادق در شرایط قضیه تغییر علامت مشتق، یک $w\in]u,v[$ وجود دارد که داشته باشیم: $\mathfrak{p}(v)-\mathfrak{p}(u)=\mathfrak{p}'(w)\cdot(v-u)$. حال، اگر $\mathfrak{p}'(w)>0$ آنگاه $\mathfrak{p}(v)>\mathfrak{p}(u)$ و اگر $\mathfrak{p}'(w)<0$ آنگاه $\mathfrak{p}(v)<\mathfrak{p}(u)$ به‌دست می‌آید. □

آخرین و قویترین شاهد بر توانایی `IVT`، قضیه تارسکی است که بیان می‌کند نظریه `OF+IVT` تمام است؛ یعنی برای هر جمله θ در زبان میدان‌های مرتب، یا داریم $\mathtt{OF+IVT}\vdash\theta$ یا $\mathtt{OF+IVT}\vdash\neg\theta$. برای این نتیجه (قضیه ۶.۲.۳)، در ادامه یک اثبات تعدیل شده از کرایسل و کریوین[۱] [۱۵] را ارایه می‌دهیم. لازم به‌ذکر است که از این نتیجه به‌دست می‌آوریم که هر جمله‌ای که در $\mathbb{R}$ درست باشد، از `IVT` (+`OF`) قابل اثبات است. چراکه در غیر این‌صورت، باید نقیض آن قابل اثبات باشد و این متناقض با درستی آن در $\mathbb{R}$ است. پس برای مثال،

---
[۱] Kreisel & Krivine

در میدان‌های مرتب داریم $\mathtt{DCI}(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}}) \Longrightarrow \mathtt{IVT}$. علاوه بر این، اگر یک اصل موضوع یا یک طرح اصل موضوعی که در $\mathbb{R}$ درست است بتواند IVT را ثابت کند، آنگاه با IVT هم‌ارز است؛ ازین‌رو می‌تواند به عنوان اصل‌بندی دیگری از نظریه میدان‌های بسته حقیقی روی میدان‌های مرتب، درنظرگرفته شود. بنابر قضیه (۸.۱.۴) که در زیر می‌آید، تمام طرح‌های اصل موضوعی که در این پایان‌نامه درنظرگرفته می‌شوند (به جز $\mathtt{DCI}_1$) با IVT هم‌ارز هستند.

لم ۵.۲.۳. (*پیوستگی چندجمله‌ای‌ها*)
برای هر چندجمله‌ای $\mathfrak{q}$ *و عضو* w *در یک میدان مرتب، اگر* $\mathfrak{q}(w){>}0$ (به ترتیب، $\mathfrak{q}(w){<}0$) *در این‌صورت* $\epsilon{>}0$ *وجود دارد به طوری‌که برای هر* $x \in [w-\epsilon, w+\epsilon]$ *داریم* $\mathfrak{q}(x){>}0$ (به ترتیب، $\mathfrak{q}(x){<}0$).

برهان. برای چندجمله‌ای $\mathfrak{q}(x) = \sum_{k\leqslant m} a_k x^k$ فرض می‌کنیم که برای یک $A{>}0$ به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $|w| < A$ و برای هر $k \leqslant m$، $|a_k| < A$. در ادامه قرار می‌دهیم $B = A\sum_{k\leqslant m}\sum_{i<k}\binom{k}{i}A^i$ و $\epsilon{>}0$ را طوری درنظر می‌گیریم که $\epsilon{<}1$ و نیز $\epsilon B{<}\frac{1}{2}|\mathfrak{q}(w)|$؛ توجه داریم که $|\mathfrak{q}(w)| \neq 0$. حال، برای هر $x \in [w-\epsilon, w+\epsilon]$ داریم $x = w+\delta$ که $\delta \in [-\epsilon, \epsilon]$. بنابراین،

$$\begin{array}{rclcl} |\mathfrak{q}(x) - \mathfrak{q}(w)| & = & |\sum_{k\leqslant m} a_k([w+\delta]^k - w^k)| & = & |\sum_{k\leqslant m} a_k \sum_{i<k}\binom{k}{i}\delta^{k-i}w^i| \\ & \leqslant & \sum_{k\leqslant m} A\sum_{i<k}\binom{k}{i}\epsilon^{k-i}A^i & \leqslant & \sum_{k\leqslant m}|a_k|\sum_{i<k}\binom{k}{i}|\delta|^{k-i}|w|^i \\ & = & \epsilon A\sum_{k\leqslant m}\sum_{i<k}\binom{k}{i}\epsilon^{k-1-i}A^i & \leqslant & \epsilon B < \frac{1}{2}|\mathfrak{q}(w)|. \end{array}$$

در نتیجه $\mathfrak{q}(w) - \frac{1}{2}|\mathfrak{q}(w)| < \mathfrak{q}(x) < \mathfrak{q}(w) + \frac{1}{2}|\mathfrak{q}(w)|$. پس اگر $\mathfrak{q}(w) > 0$ آنگاه برای هر $x \in [w-\epsilon, w+\epsilon]$ داریم $\mathfrak{q}(x){>}\frac{1}{2}\mathfrak{q}(w){>}0$ و اگر $\mathfrak{q}(w){<}0$ آنگاه برای هر $x \in [w-\epsilon, w+\epsilon]$ داریم $\mathfrak{q}(x){<}\frac{1}{2}\mathfrak{q}(w){<}0$. □

در اینجا اثبات قضیه تارسکی برای تمامیت میدان‌های مرتب بسته حقیقی را ارایه می‌دهیم؛ این اثبات تعدیل شده اثبات ارایه شده در [۱۵] می‌باشد.

قضیه ۶.۲.۳. (*IVT کامل است.*)

نظریه $\mathtt{OF}+\mathtt{IVT}$ *کامل است.*

برهان. از آنجایی که هر ترم زبان $\{+,0,-,\times,1\}$ با متغیر آزاد x، یک چندجمله‌ای بر حسب x است که ضرایب آن، ترم‌های فاقد x می‌باشند پس هر فرمول اتمی بر حسب x معادل است با $\mathfrak{p}(x)=0$ یا $\mathfrak{q}(x)>0$؛ که $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ چندجمله‌ای می‌باشند. می‌دانیم که علامت نقیض $\neg$ می‌تواند با معادل‌های زیر حذف شود به‌طوری‌که که فقط فرمول‌های اتمی را داشته باشیم؛ $[\mathfrak{p}(x)\neq 0]\equiv[\mathfrak{p}(x)>0\vee\mathfrak{p}(x)<0]$ و $[\mathfrak{q}(x)\not>0]\equiv[\mathfrak{q}(x)=0\vee\mathfrak{q}(x)<0]$. یعنی فرمول‌های به شکل $\exists x\,[\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i<\ell}\mathfrak{p}_i(x)=0\ \wedge\ \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0]$ برای چندجمله‌ای‌های $\{\mathfrak{p}_i(x)\}_{i<\ell}$ و $\{\mathfrak{q}_j(x)\}_{j<n}$را درنظر می‌گیریم. در نهایت کافیست فرمول‌های کراندار به شکل $\exists x\in]a,b[\colon\psi(x)$ را درنظر بگیریم چرا که هر فرمول $\exists x\,\psi(x)$ با فرمول زیر معادل است:

$$\exists x<-1\psi(x)\vee\psi(-1)\vee\exists x\in]-1,1[\colon\psi(x)\vee\psi(1)\vee\exists x>1\psi(x).$$

همچنین، فرمول‌های معادل زیر را هم داریم:

$$\exists x>1\psi(x)\equiv\exists y\in]0,1[\colon\psi(y^{-1})\ \text{و}\ \exists x<-1\psi(x)\equiv\exists y\in]0,1[\colon\psi(-y^{-1}).$$

یادآوری می‌کنیم که برای هر چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)=\sum_{i\leqslant m}a_ix^i$ و $\mathfrak{q}(x)=\sum_{j\leqslant l}b_jx^j$ و هر $y>0$ داریم

$$\begin{cases}\mathfrak{p}(y^{-1})=0\leftrightarrow\sum_{i\leqslant m}a_iy^{-i}=0\leftrightarrow\sum_{i\leqslant m}a_iy^{m-i}=0\leftrightarrow\sum_{j\leqslant m}a_{m-j}y^j=0,\\ \mathfrak{q}(y^{-1})>0\leftrightarrow\sum_{j\leqslant l}b_jy^{-j}>0\leftrightarrow\sum_{j\leqslant l}b_jy^{l-j}>0\leftrightarrow\sum_{i\leqslant l}a_{l-i}y^i>0;\end{cases}$$

و بنابراین، هر فرمول اتمی $\theta(y^{-1})$(و همچنین $\theta(-y^{-1})$)، برای $y>0$، با فرمول اتمی دیگر $\eta(y)$ معادل است. معادل بودن هر فرمول به شکل

$$\varphi(a,b)=\exists x\in]a,b[\colon\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i<\ell}\mathfrak{p}_i(x)=0\wedge\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0$$

با یک فرمول خالی از سور را به کمک استقراء روی درجه فرمول، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، نشان می‌دهیم: برای ترم $\mathfrak{p}(x)=\sum_{i\leqslant m}a_ix^i$ قرار می‌دهیم $\deg_x\mathfrak{p}=m$؛ برای فرمول اتمی $\mathfrak{p}(x)=0$ قرار می‌دهیم $\deg_x(\mathfrak{p}(x)=0)=\deg_x\mathfrak{p}$ و $\deg_x(\mathfrak{q}(x)>0)=1+\deg_x\mathfrak{q}$؛ در نهایت، درجه هر فرمول برابر با بیشترین درجه زیرفرمول‌های اتمی آن است.

آنچه را که ما اثبات می‌کنیم به‌صورت زیر است:

$(\star)$ برای هر فرمول $\varphi(a,b)$ با ویژگی‌های فوق، فرمول‌هایی مانند $\{\Phi_k(y),\Psi_k(y)\}_{k<m}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\mathtt{OF}+\mathtt{IVT}+a<b\vdash\varphi(a,b)\leftrightarrow\bigvee\!\!\!\bigvee_{k<m}[\Phi_k(a)\wedge\Psi_k(b)]$؛ و علاوه بر آن $\deg_y$ فرمول‌های $\{\Phi_k(y),\Psi_k(y)\}$ کمتر از $\deg_x(\varphi(a,b))$ می‌باشد.

این مطلب با استقراء بر روی $\hbar=\deg_x(\varphi(a,b))$ نشان داده می‌شود؛ لازم به ذکر است که اینجا با a,b به عنوان متغیرهای جدید رفتار می‌شود. اگر $\hbar=0$ آنگاه x صرفاً به شکل صوری در $\varphi(a,b)$ ظاهر می‌شود پس با یک فرمول خالی از سور معادل است. حال فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب $(\star)$ برای تمام فرمول‌های با $\deg_x$ کمتر از $\hbar$ برقرار است.

(1) ابتدا حالت $\ell=0$ را درنظر می‌گیریم؛ یعنی هیچ تساوی‌ای وجود ندارد و فرمول ما به‌صورت $\varphi(a,b)=\exists x\in]a,b[:\ \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0$ است. طبق لم ۵.۲.۳، $\mathfrak{q}_j$ ها در یک نقطه از $]a,b[$ مثبت هستند اگروتنها اگر در یک زیربازه $]u,v[\subseteq]a,b[$ شامل آن نقطه مثبت باشند. پس فرمول $\varphi(a,b)$ معادل با فرمول $\mathsf{F}(a,b)\vee\bigvee\!\!\!\bigvee_{i<n}\mathsf{G}_i(a,b)\vee\bigvee\!\!\!\bigvee_{i,j<n}\mathsf{H}_{i,j}(a,b)$ است. جایی‌که F، $\{\mathsf{G}_i\}_{i<n}$ و $\{\mathsf{H}_{i,j}\}_{i,j<n}$ به‌صورت زیر هستند؛

$$\mathsf{F}(a,b)=\forall x\in]a,b[:\ \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0$$

$$\mathsf{G}_i(a,b)=\big[\exists u\in]a,b[:\ \mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\mathsf{F}(a,u)\big]\bigvee\big[\exists v\in]a,b[:\ \mathfrak{q}_i(v)=0\wedge\mathsf{F}(v,b)\big],$$ و

$$\mathsf{H}_{i,j}(a,b)=\exists u,v\in]a,b[:\ u<v\wedge\mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\mathfrak{q}_j(v)=0\wedge\mathsf{F}(u,v).$$

فرمول $\mathsf{F}(a,b)$ معادل با $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(a)\geqslant0\wedge\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j<n}\neg\exists x\in]a,b[:\mathfrak{q}_j(x)=0$ است، که $\deg_x$ آنها کمتر از $\hbar$، پس طبق فرض استقراء $(\star)$، معادل با $\bigvee\!\!\!\bigvee_{k<m}[\Phi_k(a)\wedge\Psi_k(b)]$ است جایی‌که فرمول‌های $\{\Phi_k(y),\Psi_k(y)\}_{k<m}$ خالی از x هستند و $\deg_y$ آنها کمتر از $\hbar$ می‌باشد. درنتیجه برای هر $i<n$، عبارت $G_i(a,b)$ برای $(k<m)$ معادل با ترکیب فصلی فرمول‌های

$$\big(\Phi_k(a)\wedge\exists u\in]a,b[:\ [\mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\Psi_k(u)]\big)\bigvee\big(\exists v\in]a,b[:\ [\mathfrak{q}_i(v)=0\wedge\Phi_k(v)]\wedge\Psi_k(b)\big).$$

می‌باشد. چون $\deg_u$ مربوط به $\mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\Psi_k(u)$ و نیز $\deg_v$ مربوط به $\mathfrak{q}_i(v)=0\wedge\Phi_k(v)$ کمتر از $\hbar$ می‌باشند، پس می‌توان فرض استقراء $(\star)$ را روی تمام G_i ها به‌کارگرفت. در نهایت، برای $\mathsf{H}_{i,j}(a,b)$ خاطرنشان می‌کنیم که این عبارت معادل با ترکیب فصلی (روی $k<m$) فرمول‌های زیر است:

$$\exists u\in]a,b[:\ \big(\mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\Phi_k(u)\wedge\exists v\in]u,b[:\ [\mathfrak{q}_j(v)=0\wedge\Psi_k(v)]\big).$$

حال، $\deg_v$ فرمول $\mathfrak{q}_j(v)=0 \wedge \Psi_k(v)$ کمتر از $\hbar$ است؛ طبق فرض استقراء $(\star)$، فرمول‌های $\{\Theta_{j,k,\iota}(z), \Upsilon_{j,k,\iota}(z)\}_{\iota<l}$ با $\deg_z$ کمتر از $\hbar$ وجود دارند به طوری‌که داریم

$$\exists v \in]u, b[: [\mathfrak{q}_j(v)=0 \wedge \Psi_k(v)] \equiv \bigvee_{\iota<l} [\Theta_{j,k,\iota}(u) \wedge \Upsilon_{j,k,\iota}(b)].$$

پس، چون $\deg_u$ های تمام فرمول‌های $\mathfrak{q}_i(u)=0 \wedge \Phi_k(u) \wedge \Theta_{j,k,\iota}(u)$ کمتر از $\hbar$ می‌باشند، با به‌کارگیری فرض استقراء $(\star)$، عبارت $\mathsf{H}_{i,j}(a,b)$، برای $k<m, \iota<l$، با ترکیب فصلی فرمول‌های $\exists u \in]a,b[: \big(\mathfrak{q}_i(u)=0 \wedge \Phi_k(u) \wedge \Theta_{j,k,\iota}(u)\big) \wedge \Upsilon_{i,j,\iota}(b)$ معادل است.

(2) حالت دوم را $\ell>0$ درنظر می‌گیریم؛ به‌دلیل $\sum_{i<\ell} \alpha_i^2=0 \iff \bigwedge_{i<\ell} \alpha_i=0$ می‌توان فرض کرد $\ell=1$. بنابراین می‌توان تمام $\mathfrak{p}_i(x)$ ها را با چندجمله‌ای $\sum_{i<\ell} \mathfrak{p}_i^2(x)$ جایگزین کرد اما با این‌کار، $\deg_x$ فرمول‌های به‌دست آمده افزایش می‌یابند. راه دیگری برای کاهش ℓ (تعداد چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{p}_i$) بدون افزایش $\deg_x$ فرمول‌ها وجود دارد:

<u>(I)</u> با فرض اینکه برای چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{p}(x)=\alpha x^d+\sum_{i<d} a_i x$ و $\mathfrak{q}(x)=\beta x^e+\sum_{j<e} b_j x^j$ داشته باشیم $d \geqslant e$. قرار می‌دهیم $\mathfrak{r}(x)=\mathfrak{q}(x)-\beta x^e$ و $\mathfrak{s}(x)=\beta \mathfrak{p}(x)-\alpha x^{d-e} \mathfrak{q}(x)$؛ در این‌صورت داریم

$$\big[\mathfrak{p}(u)=\mathfrak{q}(u)=0\big] \iff \big[\beta=0 \wedge \mathfrak{p}(u)=\mathfrak{r}(u)=0\big] \vee \big[\beta \neq 0 \wedge \mathfrak{s}(u)=\mathfrak{q}(u)=0\big].$$

با ادامه این روش تعداد چندجمله‌ای‌ها از دو به حداقل یک مورد کاهش پیدا کرده و حداکثر با یک چندجمله‌ای مواجه خواهیم بود که $\deg_x$ فرمول اخیر نیز از $\deg_x$ فرمول اولیه بزرگتر نخواهد بود.

پس می توان فرض کرد $\ell=1$؛ درنتیجه $\varphi(a,b)=\exists x \in]a,b[: \mathfrak{p}(x)=0 \wedge \bigwedge_{j<n} \mathfrak{q}_j(x)>0$ و علاوه بر آن $\deg_x(\varphi(a,b))=\hbar$. اگر برای هر $j<n$، داشته باشیم $\deg_x \mathfrak{q}_j < \deg_x \mathfrak{p}$ آنگاه همواره می‌توان یک فرمول را به‌صورت معادلش تبدیل کرد.

<u>(II)</u> اگر $\deg_x \mathfrak{q}_1 \geqslant \deg_x \mathfrak{p}$ آنگاه برای $d \leqslant e$ درنظر می‌گیریم $\mathfrak{p}(x)=\alpha x^d+\sum_{i<d} a_i x^i$ و $\mathfrak{q}_1(x)=\beta x^e+\sum_{j<e} b_j x^j$. با قراردادن چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{r}(x)=\mathfrak{p}(x)-\alpha x^d$ و

$\mathfrak{s}(x)=\alpha^2\mathfrak{q}_1(x)-\alpha\beta x^{e-d}\mathfrak{p}(x)$؛ داریم

$$\big[\mathfrak{p}(u)=0\wedge\mathfrak{q}_1(u)>0\big] \iff \big[\alpha=0\wedge\mathfrak{r}(u)=0\wedge\mathfrak{q}_1(u)>0\big]\vee\big[\alpha\neq0\wedge\mathfrak{p}(u)=0\wedge\mathfrak{s}(u)>0\big].$$

با ادامه همین روش، یا تساوی $(\mathfrak{p}(x)=0)$ از بین می‌رود (که در این‌صورت به حالت نخست می‌رسیم) یا درجه نامعادله $\deg_x(\mathfrak{q}(x)>0)$ کوچکتر یا مساوی درجه تساوی $\deg_x(\mathfrak{p}(x)=0)$ خواهد شد.

در ادامه فرض کنید در فرمول $\varphi(a,b)=\exists x\in]a,b[\colon\ \mathfrak{p}(x)=0\wedge\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0$ داریم $\deg_x(\varphi(a,b))=\hbar=\deg_x\mathfrak{p}$ و نیز $\bigwedge_{j<n}\deg_x\mathfrak{q}_j<\hbar$. حال فرمول $\varphi(a,b)$ معادل با فرمول $\varphi_1(a,b)\vee\varphi_2(a,b)\vee\varphi_3(a,b)$ است وقتی‌که داریم:

$$\varphi_1(a,b)=\exists x\in]a,b[\colon\ \mathfrak{p}(x)=0\wedge\mathfrak{p}'(x)=0\wedge\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0،$$

$$\varphi_2(a,b)=\exists x\in]a,b[\colon\ \mathfrak{p}(x)=0\wedge\mathfrak{p}'(x)>0\wedge\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0،$$

و

$$\varphi_3(a,b)=\exists x\in]a,b[\colon\ \mathfrak{p}(x)=0\wedge\mathfrak{p}'(x)<0\wedge\bigwedge_{j<n}\mathfrak{q}_j(x)>0.$$

چون $\deg_x\mathfrak{p}'<\deg_x\mathfrak{p}$ (نگاه کنید به تعریف ۲.۲.۳) آنگاه با اعمال <u>(I)</u> بر φ_1، فرمول معادلی به‌دست می‌آوریم که $\deg_x$ در آن کمتر از $\hbar$ است، پس می‌توان فرض استقراء $(\star)$ را روی آن به‌کار بست. طبق IVT و گزاره ۴.۲.۳، خاطرنشان می‌کنیم که تمام $\mathfrak{q}_j$ها و نیز $\mathfrak{p}$ها، در نقطه‌ای از $]a,b[$ که $\mathfrak{p}$ صفر می‌شود، اکیداً مثبت هستند، اگروتنها اگر تمام $\mathfrak{q}_j$ها و $\mathfrak{p}$ها بر روی یک زیربازه‌ی باز $]u,v[\subseteq]a,b[$ اکیداً مثبت باشند، به طوری‌که ($\mathfrak{p}$ به‌طور یکنوا صعودی باشد و نیز) $\mathfrak{p}(u)<0<\mathfrak{p}(v)$. پس فرمول $\varphi_2(a,b)$ معادل ترکیب فصلی فرمول‌های زیر است:

(i) $\mathfrak{p}(a)<0<\mathfrak{p}(b)\wedge\mathsf{F}(a,b)$،

(ii) $\bigvee_{i<n}\Big(\big[\mathfrak{p}(a)<0\wedge\exists u\in]a,b[\colon\ \big(\mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\mathfrak{p}(u)>0\wedge\mathsf{F}(a,u)\big)\big]\bigvee$
$\big[\mathfrak{p}(b)>0\wedge\exists v\in]a,b[\colon\ \big(\mathfrak{q}_i(v)=0\wedge\mathfrak{p}(v)<0\wedge\mathsf{F}(v,b)\big)\big]\Big)$ ، و

(iii) $\bigvee_{i,j<n}\Big(\exists u,v\in]a,b[\colon\ \big[\mathfrak{q}_i(u)=0\wedge\mathfrak{q}_j(v)=0\wedge\mathfrak{p}(u)<0<\mathfrak{p}(v)\wedge\mathsf{F}(u,v)\big]\Big)$.

با فرمول (i) قبلاً برخورد داشته‌ایم (با فرمولی معادل است که $\deg_x$ آن از $\hbar$ کمتر است). فرمول‌های (ii) و (iii) می‌توانند به کمک <u>(I)</u> و <u>(II)</u> به‌طور معادل به فرمول‌های با $\deg_x$

کمتر از $\hbar$ تبدیل بشوند. در نتیجه تمام فرمول φ_2، و به‌طور کاملاً مشابه، φ_3 می‌توانند به شکل‌های معادلی نوشته بشوند که بتوان فرض استقراء ($\star$) را روی آنها به‌کارگرفت. $\square$

فصل ۴

اصل‌بندی‌های نظریه مرتبه اول میدان‌های بسته حقیقی

۱.۴ صورت‌های مرتبه اول اصل کمال حقیقی

در آنالیز ریاضی، $\mathbb{R}$ معمولاً به عنوان میدان مرتب کامل معرفی می‌شود. درواقع طبق قضیه ددکیند فقط یک میدان مرتب کامل (در حد یکریختی) وجود دارد([۲۴]). بسیاری از منابع آنالیز ریاضی وجود یک میدان مرتب کامل را فرض می‌گیرند. در بعضی دیگر، یک میدان مرتب کامل به کمک برش‌های ددکیند یا به کمک دنباله‌های کوشی از $\mathbb{Q}$ ساخته می‌شود.

معمول‌ترین بیان از اصل کمال در کتاب‌های آنالیز، اصل وجود کوچکترین کران بالایی (هر زیرمجموعه ناتهی از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالایی است) می‌باشد که صورت‌بندی آن در زبان مرتبه اول به صورت زیر است: (همواره فرض می‌کنیم زبان $\mathcal{L}$ شامل نماد محمولی $<$ است.)

تعریف ۱.۱.۴. (D-Sup)

وقتی φ یک $\mathcal{L}$ـ فرمول است، خاصیت کوچکترین کران بالایی تعریف‌پذیر، D-Sup$(\mathcal{L})$، را طرح مرتبه اول زیر درنظر می‌گیریم

$$\exists x\, \varphi(x) \,\wedge\, \exists y\, \forall x\, [\varphi(x) \rightarrow x \leqslant y] \longrightarrow \exists z\, \forall y\, \big(\forall x\, [\varphi(x) \rightarrow x \leqslant y] \leftrightarrow z \leqslant y\big) \qquad \diamondsuit$$

به عبارت ساده تر D-Sup می‌گوید برای یک مجموعه ناتهی، $\exists x\, \varphi(x)$، و از بالا کراندار (برای یک y داریم $\forall x\, [\varphi(x) \rightarrow x \leqslant y]$)، کوچکترین کران بالا وجود دارد (برای یک z، کران بالای y موجود است اگروتنها اگر $z \leqslant y$). دوگان عبارت فوق، اصل وجود بزرگترین کران پایین برای مجموعه ناتهی و از پایین کراندار می‌باشد:

تعریف ۲.۱.۴. (D-Inf)

طرح مرتبه اول D-Inf$(\mathcal{L})$ را برای $\mathcal{L}$ـ فرمول دلخواه φ، به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\exists x\, \varphi(x) \,\wedge\, \exists y\, \forall x\, [\varphi(x) \rightarrow y \leqslant x] \longrightarrow \exists z\, \forall y\, \big(\forall x\, [\varphi(x) \rightarrow y \leqslant x] \leftrightarrow y \leqslant z\big) \qquad \diamondsuit$$

این طرح اصل موضوعی D-Inf توسط تارسکی [۲۷] به منظور ارائه یک دستگاه اصل موضوعی کامل برای میدان مرتب اعداد حقیقی استفاده شده است (همچنین [۹] را ببینید). اثبات معادل بودن این دو طرح اصل موضوعی در زبان مرتبه اول در چهارچوب آنالیز حقیقی به‌صورت زیر است:

قضیه ۳.۱.۴. ($D\text{-}Sup \Longleftrightarrow D\text{-}Inf$)
در هر ساختار مرتب خطی، $\langle D;\mathcal{L}\rangle$، طرح اصل موضوع $D\text{-}Sup(\mathcal{L})$ درست است اگروتنها اگر $D\text{-}Inf(\mathcal{L})$ درست باشد.

برهان. در اینجا فقط $\mathtt{D\text{-}Inf}(\mathcal{L}) \Longrightarrow \mathtt{D\text{-}Sup}(\mathcal{L})$ را اثبات می‌کنیم؛ اثبات عکس آن کاملاً مشابه این قسمت است. فرض کنید برای فرمول $\varphi(x)$ و $a,b\in D$ داشته باشیم (i) $\varphi(a)$ و (ii) $\forall x\,[\varphi(x)\rightarrow b\leqslant x]$. برای استفاده از $\mathtt{D\text{-}Sup}(\mathcal{L})$ قرار می‌دهیم $\psi(x)=\forall y{<}x\,\neg\varphi(y)$. در این صورت طبق (ii) داریم (۱) $\psi(b)$ و از (i) هم (۲) $\forall x\,[\psi(x)\rightarrow x\leqslant a]$ را به‌دست می‌آوریم. حال طبق $\mathtt{D\text{-}Sup}(\mathcal{L})$ یک $c\in D$ وجود دارد که

$$\forall y\,\big(\forall x\,[\psi(x)\rightarrow x\leqslant y]\leftrightarrow c\leqslant y\big). \qquad (۱.۴)$$

اکنون نشان می‌دهیم $\forall z\,(\forall x\,[\varphi(x)\rightarrow z\leqslant x]\leftrightarrow z\leqslant c)$. برای هر $z\in D$ داریم:
(I) اگر $\forall x\,[\varphi(x)\rightarrow z\leqslant x]$ آنگاه $\psi(z)$؛ از رابطه (۱.۴) برای $z=c$ به دست می‌آوریم $\forall x\,[\psi(x)\rightarrow x\leqslant c]$. پس $z\leqslant c$.
(II) اگر $z\leqslant c$، آنگاه برای هر $x<z$ داریم $c\not\leqslant x$ و بنابراین از رابطه (۱.۴) نتیجه می‌شود برای یک u داریم $\psi(u)$ و $u\not\leqslant x$. حال از $\psi(u)$ و $x<u$ نتیجه می‌گیریم $\neg\varphi(x)$ پس داریم $\forall x{<}z\,\neg\varphi(x)$ یا به‌طور هم‌ارز $\forall x\,[\varphi(x)\rightarrow z\leqslant x]$. □

صورت دیگری از اصل کمال اعداد حقیقی، اصل ددکیند نام دارد که بیان می‌کند هیچ برش سره (بدون شکاف) در اعداد حقیقی وجود ندارد. صورت مرتبه اول این اصل به شکل زیر است:

تعریف ۴.۱.۴. (D-Cut)
وقتی φ و ψ، $\mathcal{L}$ـ فرمول‌های دلخواهی هستند طرح اصل موضوع زیر را D-Cut می‌نامیم:

$$\exists x\, \exists y\, [\varphi(x) \wedge \psi(y)] \ \wedge\ \forall x\, \forall y\, [\varphi(x) \wedge \psi(y) \to x{<}y] \longrightarrow$$

$$\exists z\, \forall x\, \forall y\, [\varphi(x) \wedge \psi(y) \to x{\leqslant}z{\leqslant}y] \qquad \diamondsuit$$

تارسکی [۲۵] از این طرح اصل موضوع به منظور ارایه یک دستگاه اصل موضوع مرتبه اول و کامل دیگر برای $\mathbb{R}$ استفاده کرد (مرجع [۹] را هم ببینید). درواقع در $\mathcal{L}$ـ ساختارهای مرتب خطی، طرح اصل موضوع D-Cut$(\mathcal{L})$ با سایر صورت‌بندی‌های اصل موضوع کمال، D-Sup$(\mathcal{L})$ و D-Inf$(\mathcal{L})$، معادل است:

قضیه ۵.۱.۴. ($D\text{-}Sup \iff D\text{-}Cut$)
در هر ساختار مرتب خطی، $\langle D;\mathcal{L}\rangle$، طرح اصل موضوع D-Sup$(\mathcal{L})$ درست است اگروتنها اگر D-Cut$(\mathcal{L})$ درست باشد.

برهان. اگر D-Sup$(\mathcal{L})$ در $\langle D;\mathcal{L}\rangle$ درست باشد آنگاه برای نشان دادن درستی D-Cut$(\mathcal{L})$ فرض می‌کنیم برای فرمول‌های $\varphi(x),\psi(x)$ و اعضای $a,b\in D$ داشته باشیم:
(الف) $\varphi(a)\wedge\psi(b)$ و (ب) $\forall x\,\forall y\,[\varphi(x)\wedge\psi(y)\to x<y]$. نشان می دهیم $z\in D$ وجود دارد که $\forall y\,[\varphi(x)\wedge\psi(y)\to x{\leqslant}z{\leqslant}y]$. حال طبق (الف) و (ب) به ترتیب داریم (۱) $\varphi(a)$ و (۲) $\forall x\,[\varphi(x)\ \to\ x<b]$. طبق D-Sup$(\mathcal{L})$ عضو $c\in D$ وجود دارد که داشته باشیم (۳) $\forall y\,(\forall x\,[\varphi(x)\to x{\leqslant}y]\leftrightarrow c{\leqslant}y)$. نشان می‌دهیم $\forall x\forall y\,[\varphi(x)\wedge\psi(y)\to x{\leqslant}c{\leqslant}y]$ برقرار است. مطابق (۳) برای $y=c$، برای هر x که $\varphi(x)$ درست باشد $x{\leqslant}c$ برقرار است. اکنون فرض کنید $\psi(y)$؛ در این‌صورت اگر $c\not\leqslant y$ آنگاه طبق (۳) باید xای موجود باشد که $\varphi(x)$ اما $y{<}x$. که این مطلب متناقض (ب) است چرا که در یک سمت داریم $\varphi(x)\wedge\psi(y)$ و در سمت دیگر $y{<}x$!

اگر در ساختار $\langle D;\mathcal{L}\rangle$ اصل D-Cut$(\mathcal{L})$ درست باشد آنگاه برای برقراری اصل D-Sup$(\mathcal{L})$

فرض می‌کنیم $a, b \in D$ و برای $\varphi(x)$ داشته باشیم (الف) $\varphi(a)$ و (ب) $\forall x\,[\varphi(x) \to x \leqslant b]$؛ نشان می‌دهیم $z \in D$ وجود دارد که $\forall y\,(\forall x\,[\varphi(x) \to x \leqslant y] \leftrightarrow z \leqslant y)$. برای این منظور قرار می‌دهیم $\psi(x) = \forall y \leqslant x\, \neg\varphi(y)$. در این صورت طبق (الف) و (ب)، برای هر $b' > b$ داریم (۱) $\varphi(a) \wedge \psi(b')$ و (۲) $\forall x\,\forall y\,[\varphi(x) \wedge \psi(y) \to x < y]$. پس طبق D-Cut($\mathcal{L}$) یک $c \in D$ وجود دارد که (۳) $\forall x\,\forall y\,[\varphi(x) \wedge \psi(y) \to x \leqslant c \leqslant y]$. نشان می‌دهیم c در $\forall y\,(\forall x\,[\varphi(x) \to x \leqslant y] \leftrightarrow c \leqslant y)$ صدق می‌کند. ابتدا فرض می‌کنیم $\forall x\,[\varphi(x) \to x \leqslant y]$ اما $c \not\leqslant y$؛ در این صورت یک $c' \in D$ وجود دارد که $y < c' < c$. اکنون $\forall x\,[\varphi(x) \to x < c']$ نتیجه می‌شود پس $\psi(c')$. اما بر طبق (۳) داریم $c \leqslant c'$ که این تناقض است! در ادامه فرض می‌کنیم $c \leqslant y$ و برای یک xای، $\varphi(x) \wedge x \not\leqslant y$؛ آنگاه بر طبق (۳) و $\varphi(x)$ باید داشته باشیم $x \leqslant c$ که این مطلب با $c \leqslant y < x$ در تناقض است. $\square$

معمول‌ترین تعریف از میدان بسته حقیقی، یک میدان مرتب است که در طرح اصل موضوعی زیر صدق کند:

تعریف ۶.۱.۴ (RCF). وقتی $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$ طرح اصل موضوعی زیر را به همراه اصول میدان‌های مرتب (OF) میدان بسته حقیقی درنظر می‌گیریم:

$$\forall x > 0\, \exists y\, (y^2 = x) \;\wedge\; \forall \{a_i\}_{i \leqslant 2n}\, \exists x\, (x^{2n+1} + \sum_{i \leqslant 2n} a_i x^i = 0) \qquad \diamondsuit$$

طبق تعریف، میدان بسته حقیقی میدان مرتبی است که هر عضو مثبت آن ریشه دوم و هر چندجمله ای درجه فرد در آن میدان ریشه دارد. این مطرح‌ترین تعریف از میدان‌های بسته حقیقی در واقع کم کاربردترین آنها نیز می‌باشد چرا که بیشتر قضایای جالب روی میدان‌های بسته حقیقی و درباره آنها از صورت‌های معادل دیگر آن استفاده می‌کنند. پرکاربردترین و مفیدترین تعریف میدان‌های بسته حقیقی، تعریفی است که بیان می‌کند یک میدان بسته حقیقی میدان مرتبی است که قضیه مقدار میانی، IVT، در آن برقرار باشد: برای اشاره به کاربردها و مفید بودن IVT نشان می‌دهیم قضیه مقدار میانی، RCF را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۷.۱.۴. (*IVT* $\Longrightarrow$ *RCF*)

هر میدان مرتبی که `IVT` *در آن صادق باشد، یک میدان بسته حقیقی است.*

برهان. برای هر $a>0$ قرار می‌دهیم $\mathfrak{p}(x)=x^2-a$. آنگاه $\mathfrak{p}(0)=-a<0<a^2+\frac{1}{4}=\mathfrak{p}(a+\frac{1}{2})$، و طبق `IVT`، برای x که $0<x<a+\frac{1}{2}$ داریم $\mathfrak{p}(x)=0$؛ بنابراین، $x^2=a$. در صورت نیاز، می‌توان یک چندجمله‌ای درجه فرد دلخواه را با ضرب در یک ترم خالی از x، به‌صورت $\mathfrak{p}(x)=x^{2n+1}+\sum_{i\leqslant 2n}a_ix^i$ نوشت. اکنون قرار دهید $v=1+\sum_{i\leqslant 2n}|a_i|$ و $u=-v$. در این صورت $u\leqslant -1<0<1\leqslant v$، پس داریم $|u|,|v|\geqslant 1$. حال، طبق $u+\sum_i|a_i|=-1$ و نامساوی مثلثی، داریم:

$$\mathfrak{p}(u)\leqslant u^{2n+1}+\sum_{i\leqslant 2n}|a_i||u|^i\leqslant u^{2n+1}+\sum_{i\leqslant 2n}|a_i|u^{2n}=u^{2n}(u+\sum_{i\leqslant 2n}|a_i|)=-u^{2n}<0$$

و

$$\mathfrak{p}(v)\geqslant v^{2n+1}-\sum_{i\leqslant 2n}|a_i||v|^i\geqslant v^{2n+1}-\sum_{i\leqslant 2n}|a_i|v^{2n}=v^{2n}(v-\sum_{i\leqslant 2n}|a_i|)=v^{2n}>0.$$

اکنون، نتیجه مطلوب به کمک $u<v$ و $\mathfrak{p}(u)<0<\mathfrak{p}(v)$ از `IVT` به‌دست می‌آید. □

قضیه ۸.۱.۴. ($\texttt{D-Inf}\Longrightarrow\texttt{IVT}$)

در هر میدان مرتب که $\texttt{D-Inf}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})$ *صادق باشد،* `IVT` *نیز صادق است.*

برهان. فرض کنید برای چندجمله‌ای $\mathfrak{p}$ و دو عنصر u و v که $u<v$، داریم $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(v)<0$. قرار می‌دهیم $\varphi(x)=[u\leqslant x\leqslant v\wedge\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(x)<0]$. در این‌صورت داریم $\varphi(v)$ و $\forall x\,[\varphi(x)\to u\leqslant x]$. پس برطبق $\texttt{D-Inf}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})$ عنصر w وجود دارد که (۱) $\forall y\,(\forall x\,[\varphi(x)\to y\leqslant x]\leftrightarrow y\leqslant w)$. نشان می‌دهیم $u\leqslant w\leqslant v$ و $\mathfrak{p}(w)=0$. اگر $w<u$ آنگاه طبق (۱)، برای یک x باید داشته باشیم $\varphi(x)$ و $x<u$، که این امر غیرممکن است؛ پس $u\leqslant w$ و نیز اگر $v<w$ آنگاه یک w' وجود دارد که $v<w'<w$؛ پس طبق (۱)، برای هر x که $\varphi(x)$ داریم $w'\leqslant x$ و به ویژه، چون $\varphi(v)$، داریم $w'\leqslant v$ که تناقض است، پس $w\leqslant v$ نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(w)=0$. اگر چنین نباشد، یعنی $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(w)\neq 0$، آنگاه داریم یا (i) $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(w)<0$ یا (ii) $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(w)>0$.

در هر کدام از این دو مورد، طبق لم ۵.۲.۳، یک $\epsilon>0$ وجود دارد که داشته باشیم یا (i') $\forall x\in[w-\epsilon,w+\epsilon]\colon\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(x)<0$ یا (ii') $\forall x\in[w-\epsilon,w+\epsilon]\colon\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(x)>0$.

در مورد (i') داریم $\varphi(w-\epsilon)$. اما در این‌صورت طبق (۱)، برای $y=w$، به دست می‌آوریم $w\leqslant w-\epsilon$؛ که تناقض است. در مورد (ii')، بر طبق (۱)، چون $w+\epsilon\nleqslant w$، یک x وجود دارد که $\varphi(x)$ و $x<w+\epsilon$. طبق (۱)، از فرمول $\varphi(x)$ برای $y=w$ به دست می‌آوریم $w\leqslant x$. پس داریم $x\in[w-\epsilon, w+\epsilon]$؛ اما در این‌صورت طبق (ii') خواهیم داشت $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(x)>0$ که در تضاد با $\varphi(x)$ (که ایجاب می‌کند $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(x)<0$) قرار دارد. پس داریم $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(w)=0$ و در نتیجه $\mathfrak{p}(w)=0$. یادآور می‌شویم که برطبق $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(v)<0$ داریم $w\neq u,v$، پس $w\in]u,v[$. □

نکته ۹.۱.۴. ($\texttt{D-Inf} \Longrightarrow \texttt{RCF}$)

از قضیه ۸.۱.۴ و تعریف میدان بسته حقیقی مبتنی بر IVT، نتیجه می‌شود که هر میدان مرتبی که $\texttt{D-Inf}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})$ در آن برقرار باشد، یک میدان بسته حقیقی است. این مطلب می‌تواند به‌طور مستقیم با استفاده از آنالیز مقدماتی (به کمک لم ۵.۲.۳) اثبات شود: برای a داده شده اگر کوچکترین کران بالا روی مجموعه تعریف‌پذیر $\{u|u>0\wedge u^2>a\}$ را x درنظر بگیریم آنگاه $x^2=a$ و به‌همین ترتیب، اگر کوچکترین کران بالای مجموعه $\{u|u^{2n+1}+\sum_{i\leqslant 2n} a_iu^i>0\}$ را y بگیریم، داریم $y^{2n+1}+\sum_{i\leqslant 2n} a_iy^i=0$. ◊

در پایان نشان می‌دهیم که استقراء پیوسته با تمام اصول موضوع تمامیت (کمال) هم‌ارز است، حتی در منطق مرتبه اول:

قضیه ۱۰.۱.۴. ($\textit{D-Inf} \Longleftrightarrow \textit{DCI}$)

در هر ساختار مرتب خطی $\langle D;\mathcal{L}\rangle$، طرح اصل موضوع $\textit{D-Inf}(\mathcal{L})$ درست است اگروتنها اگر $\textit{DCI}(\mathcal{L})$ درست باشد.

برهان. فرض کنید $\texttt{D-Inf}(\mathcal{L})$ در ساختار مرتب خطی $\langle D;\mathcal{L}\rangle$ درست باشد. به‌منظور اثبات درستی $\texttt{DCI}(\mathcal{L})$ فرض کنید برای فرمول φ و $a\in D$ داشته باشیم (الف) $\forall y<a\,\varphi(y)$ و (ب) $\forall x\,[\forall y<x\,\varphi(y)\rightarrow\exists z>x\,\forall y<z\,\varphi(y)]$؛ آنگاه نشان می‌دهیم $\forall x\,\varphi(x)$ برقرار است. اگر برای $b\in D$ داشته باشیم $\neg\varphi(b)$ آنگاه قرار می‌دهیم $\varphi'(x)=\neg\varphi(x)$. حال طبق (الف) به‌دست می‌آوریم (۱) $\varphi'(b)$ و (۲) $\forall x\,[\varphi'(x)\rightarrow a\leqslant x]$. طبق فرض، $\texttt{D-Inf}(\mathcal{L})$، یک $c\in D$ وجود

دارد که $\forall y\,(\forall x\,[\varphi'(x)\rightarrow y\leqslant x]\leftrightarrow y\leqslant c)$؛ یا، به طور معادل، (۳) $\forall y\,[y\leqslant c\leftrightarrow\forall x<y\,\varphi(x)]$ درست باشد. پس داریم $\forall x<c\,\varphi(x)$، بنابراین طبق (ب) عضو $d\in D$ وجود دارد به طوری‌که $d>c$ و $\forall y<d\,\varphi(y)$. برطبق (۳)، چون $d>c$، عنصر $x<d$ وجود دارد که $\neg\varphi(x)$ درست باشد و این یک تناقض است چرا که از قبل داشتیم $\forall y<d\,\varphi(y)$.

اکنون فرض کنید $\texttt{DCI}(\mathcal{L})$ برقرار باشد؛ برای اثبات درستی $\texttt{D-Inf}(\mathcal{L})$ فرض کنید برای فرمول φ و $a,b\in D$ داشته باشیم (الف) $\varphi(a)$ و (ب) $\forall x\,[\varphi(x)\rightarrow b\leqslant x]$. حال، هدف ما نشان دادن وجود $z\in D$ است که (ج) $\forall y\,(\forall x\,[\varphi(x)\rightarrow y\leqslant x]\leftrightarrow y\leqslant z)$ درست باشد. فرض کنید برای هیچ zای شرط (ج) برقرار نباشد؛ بنابراین برای هر z یک z' وجود دارد که (د) $\neg[z'\leqslant z\leftrightarrow\forall x<z'\neg\varphi(x)]$. حال، برای $\varphi'(x)=\neg\varphi(x)$، طبق (ب) داریم (۱) $\forall x<b\,\varphi'(x)$، و نشان می‌دهیم شرط (۲) $\forall x\,[\forall y<x\,\varphi'(y)\rightarrow\exists z>x\,\forall y<z\,\varphi'(y)]$ برقرار است؛ برای هر x_0 ثابت، اگر $\forall y<x_0\,\varphi'(y)$ درست باشد آنگاه (۳) $\forall x<x_0\,\neg\varphi(x)$ برقرار است. در این صورت z_0 وجود دارد که (د) درست باشد؛ اگر $z_0\leqslant x_0$ آنگاه $\neg\forall x<z_0\neg\varphi(x)$ یا $\exists x<z_0\varphi(x)$ که متناقض با (۳) است. پس $x_0<z_0$؛ طبق (د) باید داشته باشیم $\forall x<z_0\varphi'(x)$. در حالیکه، (۲) برقرار است و می‌توان از $\texttt{DCI}(\mathcal{L})$ نتیجه گرفت $\forall x\,\varphi'(x)$ که متناقض (الف) است. بنابراین $z\in D$ موجود است که در (ج) صدق کند. □

در [۱۴، قضیه ۲.۱،۳.۳] ثابت شده است که استقراء پیوسته، CI، معادل با خاصیت بزرگترین کران پایینی در میدان‌های مرتب است؛ و همچنین در [۱۳، قضیه ۱] ثابت شده است که CI معادل با اصل ددکیند (فقدان برش شکاف‌دار) است.

۲.۴ صورت مرتبه اول قضیه اساسی جبر

از قضیه ۶.۲.۳، و سایر مطالبی که بیان شد دنباله‌ای از اصول معادل زیر را نتیجه می‌گیریم $\texttt{IVT}\equiv\texttt{D-Inf}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})\equiv\texttt{D-Sup}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})\equiv\texttt{D-Cut}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})\equiv\texttt{DCI}(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})\equiv\texttt{DCI}_2(\mathcal{L}_{\texttt{OF}})$. برای RCF، در قضیه ۷.۱.۴ شرط لازم، $\texttt{RCF}\Longrightarrow\texttt{IVT}$، را نشان داده‌ایم. درستی عکس آن، $(\texttt{RCF}\Longrightarrow\texttt{IVT})$، در نوشته‌های ریاضی به کمک قضیه‌ی اساسی جبر نشان داده می‌شود؛ که

بیان می‌دارد میدان $\mathbb{R}(i)$ بسته جبری است، جایی‌که $F(i)$ از الحاق $i=\sqrt{-1}$ به میدان F به دست می‌آید (مراجعه شود به [۲، قضیه ۱۱.۲]).

به عنوان یک حقیقت مهم، یک شرط معادل برای بسته حقیقی بودن یک میدان این است که «میدان مرتب F بسته حقیقی است اگروتنها اگر میدان $F(i)$ بسته جبری باشد» (توسط آرتین شرایر). یک بیان معادل دیگر این است که «یک میدان مرتب، بسته جبری است اگروتنها اگر هر عضو مثبت میدان ریشه دوم داشته باشد و هر چندجمله‌ای را بتوان به چندجمله‌ای‌های خطی و درجه دو تجزیه کرد». این مطلب با صورتی از قضیه اساسی جبر برای $\mathbb{R}$ معادل است؛ که در اینجا یک طرح اصل موضوعی مرتبه اول از آن را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱.۲.۴. ($\mathtt{FTA}_{\mathtt{RCF}}$)
ترکیب عطفی $\forall x{>}0\, \exists y\, (y^2=x)$ و طرح اصل موضوعی مرتبه اول

$$\forall \{a_i\}_{i<2n}\, \exists \{b\}_{j<n}\, \exists \{c\}_{j<n}\, \forall x\, [(x^{2n}+\sum_{i<2n} a_i x^i)=\prod_{j<n}(x^2+b_j x+c_j)]$$

را $\mathtt{FTA}_{\mathtt{RCF}}$ می‌نامیم. در اینجا $n\in\mathbb{N}$ و $n>1$ است. $\diamondsuit$

مشخص است که تعریف $\mathtt{FTA}_{\mathtt{RCF}}$ بیان می‌کند هر چندجمله‌ای از درجه زوج می‌تواند به حاصل ضرب تعدادی چندجمله ای درجه ۲ تجزیه بشود. این طرح اصل موضوعی ایجاب می‌کند که هر چندجمله‌ای از درجه فرد ریشه دارد:

قضیه ۲.۲.۴. ($\mathit{FTA}_{\mathit{RCF}} \Longrightarrow \mathit{RCF}$)
هر میدان مرتبی که در آن $\mathit{FTA}_{\mathit{RCF}}$ برقرار باشد، بسته حقیقی است.

برهان. برای چندجمله ای درجه فرد $\mathfrak{p}(x) = x^{2n+1}+\sum_{i\leqslant 2n} a_i x^i$ طبق $\mathtt{FTA}_{\mathbb{RCF}}$، عناصر $\{b_j\}_{j\leqslant n}$ و $\{c_j\}_{j\leqslant n}$ وجود دارند به‌طوری‌که $x\cdot\mathfrak{p}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x^2+b_jx+c_j)$.

چون $\prod_{j=0}^{n} c_j = 0$، پس یک j وجود دارد که $c_j = 0$. فرض کنید $c_0 = 0$. در این‌صورت پس $x \cdot \mathfrak{p}(x) = x \cdot (x+b_0) \cdot \prod_{j=1}^{n}(x^2+b_jx+c_j)$. در نتیجه $\mathfrak{p}(-b_0) = 0$. □

قضیه ۳.۲.۴. ($FTA_{RCF} \Longrightarrow IVT$)

در هر میدان مرتبی که FTA_{RCF} برقرار باشد، `IVT` *نیز برقرار است.*

برهان. چندجمله‌ای $\mathfrak{p}(x)$ از درجه m را درنظر بگیرید. برای u, v، با شرط $u < v$ فرض کنید $\mathfrak{p}(u) \cdot \mathfrak{p}(v) < 0$. قرار می‌دهیم $\mathfrak{q}(x) = \frac{1}{\mathfrak{p}(u)}(1+x^2)^m\, \mathfrak{p}(u + \frac{v-u}{1+x^2})$. در این‌صورت برای چندجمله‌ای با درجه کمتر از m داریم $\mathfrak{q}(x) = x^{2m} + \mathfrak{r}(x^2)$. طبق $\mathtt{FTA}_{\mathbb{R}}$، برای برخی $\{b_j\}_{j<m}$ و $\{c_j\}_{j<m}$ها داریم $\mathfrak{q}(x) = \prod_{j<m}(x^2+b_jx+c_j)$. حال، $\prod_{j<m} c_j = \mathfrak{q}(0) = \frac{\mathfrak{p}(v)}{\mathfrak{p}(u)} = \frac{\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}(v)}{\mathfrak{p}(u)^2} < 0$. پس نتیجه می‌شود برای یک j، $c_j < 0$. فرض کنید $c_0 < 0$. در حالیکه $b_0^2 - 4c_0 > 0$ و بنابراین برای یک d، داریم $b_0^2 - 4c_0 = d^2$. اکنون، $s = \frac{1}{2}(-b_0+d)$ یک ریشه $x^2+b_0x+c_0$ و در نتیجه ریشه $\mathfrak{q}(x)$ نیز می‌باشد. در پایان، به‌وضوح برای $r = u + \frac{v-u}{1+s^2}$، داریم $u < r < v$ و $\mathfrak{p}(r) = 0$. □

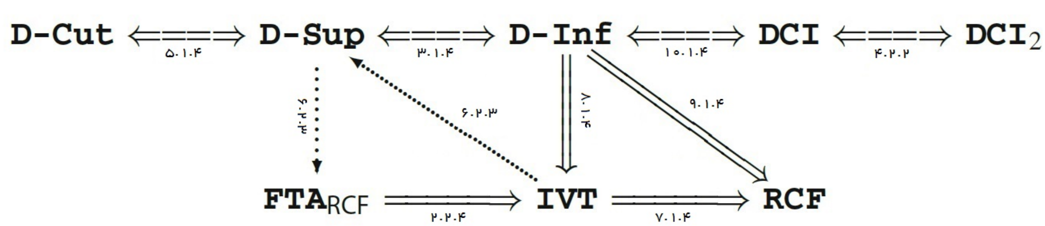
پس بر طبق قضایای ۳.۲.۴ ($\mathtt{FTA}_{\mathtt{RCF}} \Longrightarrow \mathtt{IVT}$) و ۷.۱.۴ ($\mathtt{IVT} \Longrightarrow \mathtt{RCF}$) طرح اصل موضوعی $\mathtt{FTA}_{\mathtt{RCF}}$ ایجاب می‌کند هر چندجمله‌ای از درجه فرد ریشه داشته باشد. پس با استقراء روی درجه چندجمله‌ای‌ها، می‌توان ثابت کرد وقتی $\mathtt{FTA}_{\mathtt{RCF}}$ برقرار است، هر چندجمله‌ای به صورت حاصل‌ضرب عامل‌های خطی و درجه دو نوشته می‌شود.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و مسایل باز

استقراء پیوسته در یک‌صد سال اخیر در متون ریاضی موجود بوده است (با شروع از [۶] در سال ۱۹۱۹). ما سه نسخه از آن را در تعاریف ۲.۱.۱،۲.۱.۲،۲.۱.۴ دست‌چین نمودیم (توجه کردیم که تمام فرمت‌های دیگر با یکی از این سه فرمت معادل می‌باشند). و در این پایان‌نامه، برای اولین بار آنها را در منطق مرتبه اول صورت‌بندی کردیم (در تعاریف ۲.۲.۱،۲.۲.۲،۲.۲.۳). نشان دادیم که دو مورد از سه مورد یاد شده با هم معادل هستند (قضیه ۲.۲.۴) در حالیکه آن دیگری (قدیمی‌ترین آن سه مورد) با آنها معادل نیست (قضیه ۲.۲.۵). در حقیقت، دو نسخه قوی‌تر اصل استقراء با اصل کمال میدان‌های مرتب معادل می‌باشند اما مورد سوم با خاصیت ارشمیدسی (قضیه ۲.۲.۷) معادل است نه با اصل کمال. لازم به یادآوری است که فرمول‌بندی‌های مرتبه اول دو طرح اصل موضوعیِ قویِ استقراء پیوسته، به‌طور کامل نظریه میدان‌های بسته حقیقی را اصل‌بندی می‌کنند به عنوان مثال قضیه (۴.۱.۱۰) را ببینید. برای این نظریه تعدادی از اصل‌بندی‌ها را (تعاریف ۴.۱.۱، ۴.۱.۲، ۴.۱.۴، ۴.۱.۶، ۳.۲.۱) گردآوری کرده‌ایم که با یکدیگر معادل هستند (قضیه‌های ۴.۱.۳، ۴.۱.۵، ۴.۱.۱۰). در اینجا یک مورد دیگر را به آنها اضافه کردیم: $\mathtt{FTA}_{\mathrm{RCF}}$ یک فرمول‌بندی از قضیه اساسی جبر؛ تعریف (۴.۲.۱).

نمودار زیر خلاصه‌ی نتایج نو و قدیمی اثبات شده‌ی ما می‌باشد:



اثبات تمامیت $\mathtt{IVT}(+\mathtt{OF})$ در قضیه ۳.۲.۶ بیان شده است و هم‌چنان‌که در بخش ۳.۲ اشاره شد، معادل بودن $\mathtt{D\text{-}Inf}(\mathcal{L}_{\mathtt{OF}})$ و $\mathtt{FTA}_{\mathrm{RCF}}$ را با $\mathtt{IVT}$ نتیجه می‌دهد. در پایان به چند مسأله باز در زمینه موضوع این پایان‌نامه اشاره می‌کنیم:

(1) یافتن اثبات‌های زیبا و آراسته و البته مرتبه اول از $\mathtt{IVT} \Longrightarrow \Theta$ برای حالتی که $\Theta \in \{\mathtt{D\text{-}Inf}, \mathtt{D\text{-}Sup}, \mathtt{D\text{-}Cut}, \mathtt{DCI}, \mathtt{DCI}_2, \mathtt{FTA}_{\mathrm{RCF}}\}$، پرسش‌های هنوز بدون پاسخ می‌باشند.

خاطرنشان می‌کنیم که قصد و انگیزه ما از بازگویی برخی از قضایای کلاسیک آنالیز ریاضی صرفاً تاکید بر قابلیت بیان آنها در منطق مرتبه اول بوده است. چنانکه در زیر می‌بینیم قابلیت صورت‌پذیری در منطق مرتبه اول یک موضوع بدیهی نیست. تمام اثبات‌ها (به جز برهان قضیه ۷.۲.۲) مرتبه اول بودند.

(2) پرسش باز_پاسخ دوم، مسئله وجود یک اثبات مرتبه اول آراسته و پیراسته برای $\mathtt{RCF} \Longrightarrow \mathtt{FTA}_{\mathrm{RCF}}$ می‌باشد (با این اثبات، شکاف موجود در نمودار بالا پر می‌شود). چنانکه قبلاً هم اشاره شد اثبات‌های مرتبه دوم برای این مسئله وجود دارند (که اثبات‌های سه و چهار برای قضیه اساسی جبر در [۱۰] می‌باشند). طبق قضیه تمامیت گودل برای منطق مرتبه اول، چنین اثباتی باید موجود باشد؛ اما به واقع این اثبات چیست؟ در حقیقت هر اثبات برای این مطلب، یک اثبات محکم و استوار برای قضیه اساسی جبر خواهد بود که بدون اشاره به اعداد مختلط و صرفاً به کمک آنالیز حقیقی انجام شده است، و نیز یک اثبات مرتبه اول این قضیه خواهد بود که برای اولین بار ارایه می‌شود.

(3) در بخش‌های قبل دیدیم که اصل‌بندی‌های معادل با میدان‌های مرتب کامل، می‌توانند نظریه میدان‌های بسته حقیقی را روی $\mathtt{OF}$ به‌طور کامل اصل‌بندی کنند. فرمول‌بندی کردن این اصل‌بندی‌ها، در زبان منطق مرتبه اول، یک زمینه‌ی تحقیقاتی پویا و گسترده به منظور پژوهش است؛ و مشاهده می‌کنیم که برخی از آنها می‌توانند به‌طور کامل نظریه میدان‌های بسته حقیقی را روی $\mathtt{OF}$ اصل‌بندی کنند. آیا نظریه $\mathtt{OF}+\Theta$، وقتی Θ یک فرمول‌بندی مرتبه اول از هر کدام از ۷۲ صورت معادل اصل کمال اشاره شده در [۸] باشد، با RCF معادل است؟ پاسخ این پرسش آسان نیست، زیرا برای مثال هیچکدام از دو نظریه $\mathtt{OF}+\mathtt{Rolle}$ و $\mathtt{OF}+\mathtt{MVT}$ با RCF معادل نیستند (نگاه کنید به [۵، ۱۷]) اما برای مثال $\mathtt{OF}+\mathrm{DCI}(\mathcal{L}_{\mathrm{OF}})$ با RCF معادل است.

چنانکه در بالا دیدیم $\mathtt{OF}+\Theta$، نظریه میدان‌های بسته حقیقی را اصل‌بندی می‌کند اگروتنها اگر $\mathtt{OF}+\Theta\vdash\mathtt{IVT}$. خاطرنشان می‌کنیم که $\mathtt{FTA}_{\mathrm{RCF}}$ صورت‌بندی مرتبه اول هیچ‌کدام از اصل‌های کمال ذکر شده در [۸] نمی‌باشد.

مراجع

[1] Albrecht, Alton H. & Smith, Walter A.; **Fundamental Concepts of Analysis**, Prentice-Hall (1966). isbn: 9788120301740

[2] Basu, Saugata & Pollack, Richard & Roy, Marie-Françoise; **Algorithms in Real Algebraic Geometry**, Springer (2nd ed. 2006). isbn: 9783540330981

[3] Bochnak, Jacek & Coste, Michel & Roy, Marie-Françoise; **Real Algebraic Geometry**, Springer (1998). isbn: 9783540646631

[4] Burkill, John C.; **A First Course in Mathematical Analysis**, Cambridge University Press (1978). isbn: 9780521294683

[5] Brown, R., Craven, T.C., Pelling, M.J.; *Ordered Fields Satisfying Rolle's Theorem.* **Illinois Jornal of Mathematics** 30:1 (1986) 78-66 doi: ijm/1256044752/1215.10

[6] Chao, Yuen Ren; *A Note on "Continuous Mathematical Induction"*, **Bulletin of the American Mathematical Society** 26:2 (1919) 17–.18 doi: 02.0041.47

[7] Clark, Pete L.; **The Instructor's Guide to Real Induction**, Expository Preprint (2017). Available on the net at: http://alpha.math.uga.edu/ pete/instructors-guide-2017.pdf

[8] Deveau, Michael & Teismann, Holger; *72+42: Characterizations of the Completeness and Archimedean Properties of Ordered Fields*, **Real Analysis Exchange** 39:2 (2014) .304–261 doi: 0261.2.39.realanalexch/14321.10

[9] Epstein, Richard L.; **Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundations of Logic**, Princeton University Press (2006, corr. 2011). isbn: 9780691123004

[10] Fine, Benjamin & Rosenberger, Gerhard; **The Fundamental Theorem of Algebra**, Springer (1997, softcover 2012). isbn: 9781461273431

[11] Hathaway, Dan; *Using Continuity Induction*, **The College Mathematics Journal** (Classroom Capsule) 42:3 (2011) .231–229 doi: 229.3.42.college.math.j/4169.10

[12] Jacobson, Nathan; **Basic Algebra I**, W. H. Freeman and Company (2nd ed. 1985). isbn: 9780716714804 — Reprinted by Dover Publications (2009). isbn: 9780486471891

[13] JINGZHONG, ZHANG; *The Induction on a Continuous Variable*, **IAEA–UNESCO**, ICTP Report #IC/89/157 (1989). http://streaming.ictp.it/preprints/P/89/157.pdf

[14] KALANTARI, IRAJ; "*Induction over the Continuum*", in: **Induction, Algorithmic Learning Theory, and Philosophy**, M. Friend & N.B. Goethe & V.S. Harizanov (eds.) Springer (2007), pp. .154–145 DOI: 5_1-6127-4020-1-1007/978.10

[15] KREISEL, GEORG & KRIVINE, JEAN-LOUIS; **Elements of Mathematical Logic: Model Theory**, North–Holland (1971). ISBN: 9780720422658

[16] MAHBOUBI, ASSIA; *An Induction Principle Over Real Numbers*, **Archive for Mathematical Logic**. 2-56:1 (2017) .49–43 DOI: 8-0513-016-s00153/1007.10

[17] PELLING, M.J.: *Solution of advanced problem no. 5861 (proposed by Michael Slater)*. **American Mathematical Monthly**, 88:2 (1981) 150–152. DOI: 2307/2321145.10

[18] POIZAT, BRUNO; **A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic**, Springer (2000). ISBN: 9781461264460

[19] ROYDEN, HALSEY; **Real Analysis**, Pearson (3rd ed. 1988). ISBN: 9780024041517

[20] RUDIN, WALTER; **Principles of Mathematical Analysis**, McGraw-Hill (3rd ed. 1976). ISBN: 9780070542358

[21] SALEHI, SAEED & ZARZA, MOHAMMADSALEH; *First-order Continous Induction and a logical study of real closed Fields*, **Bulletin of the Iranian Mathematical Society**, to appear (online: 2019) DOI: 0-01900252-s41980/1007.10

[22] SHELAH, SAHARON; *Quite Complete Real Closed Fields*, **Israel Journal of Mathematics** 142:1 (2004) .272–261 DOI: BF02771536/1007.10

[23] SOHRAB, HOUSHANG H.; **Basic Real Analysis**, Birkhäuser (2nd ed. 2014). ISBN: 9781493918409

[24] SPIVAK, M.: **Calculus**, Publish or Perish, Houston, 4th edn (2008). ISBN:9780914098911

[25] TARSKI, ALFRED; **Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences**, Oxford University Press (2nd ed. 1946). Reprinted by Dover Publications (1995). ISBN: 9780486284620

[26] Tarski, Alfred; **A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry**, University of California Press (2nd ed. revised 1951). Reprinted in: *Alfred Tarski, Collected Papers, Volume 3: 1957–1945*, S.R. Givant & R.N. McKenzie (eds), Birkhäuser (1986), isbn: 9783764332822, pp. .367–297

[27] Tarski, Alfred; **The Completeness of Elementary Algebra and Geometry**, Institut Blaise Pascal, Paris (1967). Reprinted in: *Alfred Tarski, Collected Papers, Volume 4: 1979–1958*, S.R. Givant & R.N. McKenzie (eds), Birkhäuser (1986), isbn: 9783764332839, pp. .346–289

[۲۸] آلتون، اچ. اسمیت؛ والتر، ا. آلبرشت؛ **مفاهیم بنیادی آنالیز**. ترجمه: بیژن شمس، حبیب الله شاد. انتشارات علوی، تهران (۱۳۶۶).

[۲۹] جی، سی. بورکیل؛ **نخستین درس در آنالیز ریاضی**. ترجمه: علی اکبر رحیم‌زاده، جواد لآلی، محمد قاسم وحیدی. انتشارات فاطمی، تهران (۱۳۶۷).

[۳۰] والتر، رودین؛ **اصول آنالیز ریاضی**. ترجمه: علی اکبر عالم‌زاده. انتشارات علمی و فنی، تهران (چاپ چهارم ۱۳۶۸).

[۳۱] اچ، ال. رویدن؛ **آنالیز حقیقی**. ترجمه: نوروز ایزد دوستدار. انتشارات دانشگاه تهران، تهران (چاپ دوم ۱۳۷۴).

[۳۲] مشکوری نجفی، م؛ **ساختار اعداد، مبانی ریاضیات**. مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان (۱۳۸۴)

واژه نامه فارسی به انگلیسی

استقراء پیوسته	Continuous Induction
اصل‌بندی	Axiomatization
اصل تمامیت(کمال)	Completeness Axiom
تصمیم‌پذیر	Decidable
حذف سور	Quantifier Elimination
خاصیت ارشمیدسی	Archimedean Property
دستگاه اصل موضوعی	Axiomatic System
صورت‌بندی کردن	Formalization
فرمول بدون سور	Quantifier-Free Formula
قضیه اساسی جبر	Fundamental Theorem of Algebra
قضیه رول	Rolle’s Theorem
قضیه مقدار میانی	Intermediate Value Theorem
کامل ددکیندی	Dedekind Complete
منطق مرتبه‌ی اول	First-Order Logic
منطق مرتبه دوم	Second-Order Logic
میدان بسته جبری	Algebraically closed Field
میدان بسته حقیقی	Real Closed Field
میدان مرتب	Ordered Field

واژه نامه انگلیسی به فارسی

میدان بسته جبری .... Algebraically closed Field
خاصیت ارشمیدسی .... Archimedean Property
اصل‌بندی .... Axiomatization
دستگاه اصل موضوعی .... Axiomatic System
اصل تمامیت(کمال) .... Completeness Axiom
استقراء پیوسته .... Continuous Induction
تصمیم‌پذیر .... Decidable
کامل ددکیندی .... Dedekind Complete
منطق مرتبه‌ی اول .... First-Order Logic
صورت‌بندی کردن .... Formalization
قضیه اساسی جبر .... Fundamental Theorem of Algebra
قضیه مقدار میانی .... Intermediate Value Theorem
میدان مرتب .... Ordered Field
حذف سور .... Quantifier Elimination
فرمول بدون سور .... Quantifier-Free Formula
میدان بسته حقیقی .... Real Closed Field
قضیه رول .... Rolle's Theorem
منطق مرتبه دوم .... Second-Order Logic

Surname: Zarza **Name:** Mohammadsaleh

Title: Axiomatizations of Subfields of the Real Numbers

Supervisor: Saeed Salehi
Advisor: Sommayeh Tari

Degree: Ph.D. **Subject:** Pure Mathematics (Mathematical Logic)
Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**
Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2019
Number of Pages: 45

Keywords: First-Order Logic, Complete Theory, Axiomatizing the Field of Real Numbers, Continuous Induction, Real Closed Fields.

Abstract

The ordered field of real numbers is the only complete ordered field, up to isomorphism; i.e, its every bounded subset has a least upper bound. There are several equivalent forms for the completeness principale, such as non-existence of cuts, or the mean value theorem. In this thesis we study the principale of continuous induction, an equivalent of the completeness principale, and its first-order formalizations. We show that the first-order versions of the continuous induction axiomatizes real ordered fields over the theory of ordered fields. We show that also a first-order formalization of the fundamental theorem of algebra has this property. We also present some proofs for Tarski's theorem on the completeness of algebraically closed fields of characteristic zero and real closed ordered fields, and propose some open problems on ordered fields.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DOCTORAL THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN PURE MATHEMATICS (MATHEMATICAL LOGIC)

Axiomatizations of Subfields of the Real Numbers

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Sommayeh Tari

by

Mohammadsaleh Zarza

2019